



## Laboratorio didattico sulle coniche - simulazione della verifica scritta

Sia  $\gamma_k$  il fascio di parabole di equazione:

$$(k - 2)x^2 + (1 - 2k)y + 3x + 2k - 1 = 0$$

1. Si studi il fascio, individuando in particolare:
  - a. Le equazioni delle generatrici;
  - b. Gli eventuali punti base;
  - c. I casi in cui il fascio degenera;
2. Verificare o giustificare la seguente affermazione: *“una sola generatrice del fascio incontra l’asse delle ascisse”*.
3. Scrivere l’equazione dell’ellisse avente fuoco e vertice nei punti in cui la generatrice del fascio incontra l’asse delle ascisse.
4. Ricavare l’eccentricità dell’ellisse e disegnarne il grafico qualitativo.
5. Tra i due punti base del fascio, Indicare con P il punto base di ordinata minore. Successivamente rilevare le due tangenti all’ellisse condotte da P.
6. Indicare con C e D i punti in cui le tangenti all’ellisse incontrano la curva e con E e G i punti dove le medesime tangenti incontrano l’asse delle ascisse, calcolare l’area della superficie occupata dal trapezio isoscele CDEG. [G.B.]

### Risultati:

1a  $y = \frac{1}{2}x^2 + 1; y = 2x^2 - 3x + 1;$

1b  $A(0; 1) \quad B(2; 3)$

1c *il fascio degenera per  $k = 2$  e per  $k = \frac{1}{2}$*

2 *solo la generatrice  $y = 2x^2 - 3x + 1$ , in quanto l’altra non ha zeri*

3  $F\left(\frac{1}{2}; 0\right); V(1; 0); eq. ellisse  $x^2 + \frac{4}{3}y^2 = 1;$$

4  $e = \frac{1}{2};$

5.  $y = \pm \frac{1}{2}x + 1;$

6.  $A_{CDEG} = \frac{15}{8}.$

1. Si studi il fascio, individuando in particolare:

a. Le equazioni delle generatrici;

$$kx^2 - 2x^2 + y - 2ky + 3x + 2k - 1 = 0 \Rightarrow k(x^2 - 2y + 2) - 2x^2 + y + 3x - 1 = 0$$

Per individuare le due parabole generatrici, si divide l'intera equazione per  $k$  considerando due valori del parametro:

- per  $k \rightarrow 0$ , l'equazione moltiplicata per il parametro si annulla, per la legge di annullamento del prodotto, e si ottiene solo l'equazione priva del parametro, perché moltiplicata per un numero circa uguale a 1:  $-2x^2 + y + 3x - 1 = 0$ ;
- per  $k \rightarrow \infty$ , l'equazione da cui non è stato raccolto il parametro risulta moltiplicata per una quantità indefinita, per cui è valida l'equazione contenente  $k$ :  $x^2 - 2y + 2 = 0$ .

b. Gli eventuali punti base;

Per individuare i punti base del fascio, cioè i punti di intersezione tra le parabole che lo generano, è necessario mettere a sistema le equazioni delle due parabole generatrici:

$$\begin{cases} -2x^2 + 3x + y - 1 = 0 \\ x^2 - 2y + 2 = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 2x^2 - 3x + 1 \\ y = \frac{1}{2}x^2 + 1 \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 1 = 2x^2 - 3x + 1 \\ y = \frac{1}{2}x^2 + 1 \end{cases} \begin{cases} 3x(-\frac{1}{2}x + 1) = 0 \\ y = \frac{1}{2}x^2 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \vee x_2 = 2 \\ y = \frac{1}{2}x^2 + 1 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} A(0;1) \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} B(2;3)$$

c. I casi in cui il fascio degenera;

Dalle osservazioni precedenti, si può dedurre che il fascio è generato da due parabole, che si incontrano nei punti  $A(0;1)$  e  $B(2;3)$ . In particolare il fascio degenera, cioè le parabole che lo costituiscono declassano, in due casi:

- se il coefficiente del termine di secondo grado si annulla, quindi per  $k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2$ , il fascio degenera in una retta obliqua;
- se il coefficiente della  $y$  si annulla, quindi per  $1 - 2k = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$ , il fascio degenera in due rette verticali che intersecano l'asse delle ascisse nei punti di coordinata pari agli zeri dell'equazione di secondo grado.

2. Verificare o giustificare la seguente affermazione: "una sola generatrice del fascio incontra l'asse delle ascisse"

Per determinare i punti di contatto tra le generatrici e l'asse delle ascisse, bisogna mettere a sistema le equazioni delle parabole con quella dell'asse delle  $x$ :

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} + 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ imp. in } \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 3x + 1 \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 9 - 8 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \wedge x_2 = 1$$

Dal primo sistema, che risulta impossibile, si evince che non esistono punti di contatto tra la parabola e l'asse delle ascisse, in quanto si tratta di una curva che si sviluppa interamente al di sopra dell'asse, senza mai intersecarlo. Si poteva giungere alla stessa conclusione, senza calcoli matematici, osservando l'equazione della parabola: in quanto somma di due quantità positive (un numero e un prodotto tra una quantità fissa e il quadrato del valore incognito), non ci sono valori della  $x$  che annullano l'equazione, per cui la curva che la rappresenta non incontrerà mai l'asse delle ascisse.

Il secondo sistema, invece, genera un'equazione di secondo grado in  $x$  che offre due soluzioni, che corrispondono alle ascisse dei punti di intersezione tra la parabola e l'asse delle ascisse; quindi, i punti di contatto sono  $P_1(\frac{1}{2}; 0)$  e  $P_2(1; 0)$ .

3. *Scrivere l'equazione dell'ellisse avente fuoco e vertice nei punti in cui la generatrice del fascio incontra l'asse delle ascisse.*

Ricapitolando, i punti in cui la generatrice del fascio incontra l'asse delle ascisse sono di coordinate  $P_1(\frac{1}{2}; 0)$  e  $P_2(1; 0)$ . Quindi, l'ellisse richiesta presenta fuoco e vertice in questi due punti; per comprendere quale dei due corrisponde al fuoco e quale al vertice basta osservare le loro ascisse: il punto di ascissa minore corrisponde al fuoco dell'ellisse, quindi  $F_1(\frac{1}{2}; 0)$ , e il punto di ascissa maggiore corrisponde al vertice,  $V_1(1; 0)$ . Conoscendo le coordinate di un fuoco e di un vertice, poiché l'ellisse non è traslata (ha centro nell'origine del piano cartesiano e i suoi assi giacciono sugli assi cartesiani), per simmetria si ricavano le coordinate del fuoco e del vertice che si trovano sul semiasse negativo delle ascisse, quindi  $F_2(-\frac{1}{2}; 0)$  e  $V_2(-1; 0)$ .

Il fuoco e il vertice offrono due condizioni necessarie per scrivere l'equazione dell'ellisse: considerando la forma canonica dell'equazione della conica, e cioè  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , con  $a > 0$  (quindi con asse maggiore che giace sull'asse delle ascisse) nell'ellisse considerata, l'ascissa del vertice identifica il parametro  $a$  (semidistanza tra i vertici sulle ascisse), mentre quella del fuoco identifica il parametro  $c$ , che non compare nell'equazione: i tre valori  $a$ ,  $b$  e  $c$ , infatti, sono legati dalla relazione  $c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$ , dalla cui formula inversa  $b = \pm\sqrt{a^2 - c^2}$  si ricava il valore del parametro  $b$ :

$$b = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \Rightarrow b = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Conoscendo i due parametri  $a$  e  $b$ , è possibile scrivere l'equazione dell'ellisse considerata:

$$x^2 + \frac{4}{3}y^2 = 1$$

4. *Ricavare l'eccentricità dell'ellisse e disegnarne il grafico qualitativo.*

L'eccentricità è il rapporto tra la semidistanza focale e il semiasse maggiore e suggerisce il grado di schiacciamento della curva: più il rapporto si avvicina a 1, più l'ellisse è schiacciata. L'eccentricità ha sempre valori compresi tra 0 e 1, estremi esclusi: infatti, se il rapporto è pari a 0, l'ellisse assume la forma di una circonferenza, che presenta gli assi congruenti; se il rapporto è uguale a 1, l'ellisse degenera in un segmento, poiché raggiunge il massimo grado di schiacciamento. In questo caso, i

due termini coinvolti nel rapporto sono la semidistanza focale  $c = \frac{1}{2}$  e la misura del semiasse maggiore  $a = 1$ :

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2 * 1} = \frac{1}{2}$$

5. Tra i due punti base del fascio, Indicare con P il punto base di ordinata minore. Successivamente rilevare le due tangenti all'ellisse condotte da P.

Il punto base di ordinata minore è P(0; 1); poiché si tratta di un punto esterno all'ellisse, per rilevare le due tangenti bisogna individuare, tra le infinite rette passanti per P, quelle di coefficiente angolare tale che siano tangenti all'ellisse. Quindi, si mettono a sistema l'equazione del fascio di rette passanti per P e l'equazione dell'ellisse: si ottiene un'equazione di secondo grado in x parametrica in m:

$$\begin{cases} y - 1 = mx \\ x^2 + \frac{4}{3}y^2 = 1 \end{cases} \begin{cases} y = mx + 1 \\ x^2 + \frac{4}{3}(mx + 1)^2 = 1 \end{cases} \begin{cases} y = mx + 1 \\ x^2 + \frac{4m^2x^2 + 8mx + 4}{3} = 1 \end{cases} \begin{cases} y = mx + 1 \\ 3x^2 + 4m^2x^2 + 8mx + 1 = 0 \end{cases}$$

A questo punto, si impone la condizione di tangenza: affinché i due luoghi abbiano un solo punto di contatto, l'equazione parametrica deve avere due soluzioni reali e coincidenti, quindi bisogna imporre il delta parametrico uguale a 0:

$$(3 + 4m^2)x^2 + 8mx + 1 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \Rightarrow 16m^2 - 4m^2 - 3 = 0 \Rightarrow 12m^2 = 3 \quad m^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow m = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$$

Ottenuti i due valori opposti di m, si procede alla loro sostituzione nell'equazione del fascio per P:

$$r: y = -\frac{1}{2}x + 1 \quad s: y = \frac{1}{2}x + 1$$

6. Indicare con C e D i punti in cui le tangenti all'ellisse incontrano la curva e con E e G i punti dove le medesime tangenti incontrano l'asse delle ascisse, calcolare l'area della superficie occupata dal trapezio isoscele CDEG.

Per individuare i punti in cui le tangenti all'ellisse incontrano la curva, bisogna mettere a sistema l'equazione dell'ellisse con le equazioni, una ad una, delle due rette tangenti; in realtà, basta trovare il punto di contatto tra l'ellisse e una sola delle rette: infatti, poiché il centro P del fascio si trova sull'asse delle ordinate, su cui giace uno degli assi dell'ellisse, i punti di tangenza saranno perfettamente simmetrici, quindi avranno stesse ordinate e ascisse opposte.

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 1 \\ x^2 + \frac{4}{3}y^2 = 1 \end{cases} \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 1 \\ x^2 + \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}x + 1\right)^2 = 0 \end{cases} \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 1 \\ x^2 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} - 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 1 \\ 4x^2 - 4x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 1 \\ (2x - 1)^2 \end{cases} \begin{cases} y = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} y = \frac{3}{4} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad C\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right) \quad D\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$$

Per rilevare i punti di contatto tra le tangenti e l'asse delle ascisse, invece, basta mettere a sistema le equazioni delle rette con quella dell'asse delle  $x$ ; anche in questo caso, i due punti sono perfettamente simmetrici.

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \quad E(2; 0) \quad G(-2; 0)$$

Unendo i punti C, D, E e G, si forma un trapezio isoscele di base maggiore EG, base minore CD e altezza pari all'ordinata dei punti C e D. Quindi, per calcolare l'area, basta applicare la formula per il calcolo dell'area del trapezio:

$$A = \frac{(B + b) * h}{2} = \frac{(EG + CD) * y_{D,C}}{2} = \frac{(4 + 1) * 3}{2} = \frac{15}{2}$$

