



PROBLEMA DI MATEMATICA
IN VISTA DELL'ESAME DI STATO

Data la famiglia di funzioni:

$$f_k(x) = \frac{\frac{k}{2}x^2}{\sqrt{kx^2 + (4 - 2k)x + k - 2}}$$

1. Descrivi il comportamento di $f_k(x)$ al variare di k .
2. Individua i valori di k che rendono la funzione continua in tutto \mathbb{R} .
3. Giustifica la seguente affermazione: tutte e sole le funzioni della famiglia $f_k(x)$ che risultino definite e continue in \mathbb{R} passano per il punto $O = (0, 0)$.
4. Per un dato valore di k la funzione presenta due asintoti obliqui paralleli alle due bisettrici dei quadranti. Determina k .
5. Sostituendo a k il valore ottenuto dal punto precedente, si ottiene un'equazione equivalente a

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - x + \frac{1}{2}}}$$

studia il comportamento della funzione.

6. Individuate le coordinate dei due punti di intersezione tra il grafico G_f della funzione e il suo asintoto obliquo, a destra della curva, indica con A e B tali punti, successivamente rappresenta il grafico G_f .
7. Detto M il punto medio di \overline{AB} , D il punto di incontro dei due asintoti obliqui ed E il punto di coordinate $(\frac{1}{2}, 0)$, calcola l'area del triangolo DEM.
8. Indicata con A_{DEM} l'area del suddetto triangolo verifica la seguente equivalenza:

$$A_{DEM} = \int_0^{\frac{1}{2}} f'(x) dx$$