PROBLEMA DI MATEMATICA
IN VISTA DELL'ESAME DI STATO

Data la famiglia di funzioni:

$$f_k(x) = \frac{\frac{k}{2}x^2}{\sqrt{kx^2 + (4-2k)x + k - 2}}$$

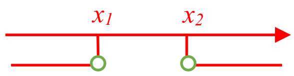
1. Descrivi il comportamento di $f_k(x)$ al variare di k.

Il trinomio al denominatore essendo sotto radice ad indice pari si impone strettamente positivo per la condizione di esistenza: $kx^2 + 2(2-k)x + k - 2 > 0$

La discussione del parametro consiste nell'analisi dei seguenti casi:

$k = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \; per \; x > \frac{1}{2}$, il grafico della funzione è dato dalla semiretta tracciata lungo l'asse delle ascisse

a. $\begin{cases} k > 0 \\ \frac{\Delta}{4} > 0 \end{cases}$ dato che $\frac{\Delta}{4} = (2-k)^2 - k(k-2) \Rightarrow \frac{\Delta}{4} = -2k + 4$, si riscrive il sistema $\begin{cases} k > 0 \\ -2k + 4 > 0 \end{cases}$ ovvero $\begin{cases} k > 0 \\ k < 2 \end{cases}$ Pertanto per $0 < k < 2$ il trinomio ha due zeri reali ($x_1 e\; x_2$) e la disequazione è soddisfatta per valori esterni ad essi, quindi il dominio è dato da

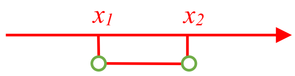


$x \in \,]-\infty, x_1[\, \cup \,]x_2, +\infty[$.

b. $\begin{cases} k > 0 \\ \frac{\Delta}{4} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k > 2 \end{cases} \Rightarrow k > 2$, siamo in assenza di zeri per il trinomio, si ottiene così un trinomio sempre positivo. La condizione di esistenza è sempre soddisfatta, quindi **il dominio è l'insieme dei numeri reali**.

c. $\begin{cases} k > 0 \\ \frac{\Delta}{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k = 2 \end{cases} \Rightarrow k = 2$, la funzione assume la forma $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2} \cdot |x|}$ che si può scrivere come funzione a tratti in cui $x_0 = 0$ rappresenta una discontinuità eliminabile.

d. $\begin{cases} k < 0 \\ \frac{\Delta}{4} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k < 0 \\ k < 2 \end{cases} \Rightarrow k < 0$ il trinomio ha due zeri reali ($x_1 e\; x_2$) e la disequazione è soddisfatta per valori compresi tra essi, quindi il dominio è dato da tutte le $x \in \,]\, x_1, x_2[$



e. $\begin{cases} k < 0 \\ \frac{\Delta}{4} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k < 0 \\ k > 2 \end{cases}$ il sistema non ammette soluzioni reali, pertanto la funzione non esiste in $\mathbb{R}$.

2. Individua i valori di k che rendono la funzione continua in tutto $\mathbb{R}$.

Il caso *b.* del punto precedente risponde alla presente domanda, quindi la funzione è ovunque definita in $\mathbb{R}$ per $k > 2$.

3. Giustifica la seguente affermazione: tutte e sole le funzioni della famiglia $f_k(x)$ che risultino definite e continue in $\mathbb{R}$ passano per il punto $O = (0,0)$.

per $k > 2$ sappiamo che la funzione esiste in tutto $\mathbb{R}$, pertanto la funzione passa per l'origine;

per $0 < k < 2$ il trinomio ha due zeri reali ($x_1 e\ x_2$), che per la regola di Cartesio sono discordi in quanto il trinomio presenta, rispettivamente, una permanenza e una variazione di segno $(+;\ +;\ -)$. Dunque il dominio non include lo zero in quanto il trinomio è positivo per valori esterni a due radici discordi;

per $k < 0$ il trinomio ha due zeri reali ($x_1 e\ x_2$), che per la regola di Cartesio risultano entrambi positivi in quanto il trinomio presenta due variazioni di segno $(-;\ +;\ -)$. Dunque il dominio non include lo zero in quanto il trinomio è positivo per valori interni a due radici, entrambe oltre lo zero.

Infine sia per $k = 0$ che per $k = 2$, la funzione non è definita in zero.

4. Per un dato valore di k la funzione presenta due asintoti obliqui paralleli alle due bisettrici dei quadranti. Determina k.

Le bisettrici dei quadranti hanno equazioni: $y = x$ e $y = -x$, pertanto i coefficienti angolari dei due asintoti saranno ± 1. Sapendo che $m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{k}{2}x^2}{x\cdot\sqrt{kx^2+(4-2k)x+k-2}}$, e dato che $x \to \infty$, si può trasferire tutto sotto radice facendo due ipotesi sul segno della x $\Rightarrow m = \pm\sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{k^2}{4}x^4}{kx^4+(4-2k)x^3+(k-2)x^2}} = \pm\sqrt{\frac{k^2}{4k}}$ in quanto di infiniti dello stesso ordine. Dato che $m = \pm 1$, si ha $\pm\sqrt{\frac{k^2}{4k}} = \pm 1 \Rightarrow \frac{k}{4} = 1 \Rightarrow k = 4.$

5. Sostituendo a k il valore ottenuto dal punto precedente, si ottiene un'equazione equivalente a

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - x + \frac{1}{2}}}$$

studia il comportamento della funzione.

$f_4(x) = \frac{2x^2}{\sqrt{4x^2-4x+2}}$ raccogliendo il 4 sotto la radice ed estraendolo successivamente, si ottiene $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+\frac{1}{2}}}$. (funzione da studiare)

CLASSIFICAZIONE: funzione algebrica irrazionale fratta;

DOMINIO: la funzione è definita e continua in $\mathbb{R}$;

SEGNO: la funzione è positiva in $\mathbb{R} - \{0\}$, valore in cui si presenta uno zero doppio;

INTERSEZIONE CON GLI ASSI: la funzione passa per l'origine;

ASINTOTI E COMPORTAMENTO AGLI ESTREMI: la funzione non presenta discontinuità di seconda specie, inoltre il $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, quindi non vi sono asintoti orizzontali.

Mentre la ricerca degli asintoti obliqui conferma che

$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x\cdot\sqrt{x^2-x+\frac{1}{2}}}$ dato che per $x \to +\infty,\ x > 0\ \Rightarrow m = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^4}{x^4-x^3+\frac{1}{2}x^2}} = 1$ (infiniti dello stesso ordine)

Mentre $m = \lim_{x\to-\infty} -\frac{x^2}{(-x)\cdot\sqrt{x^2-x+\frac{1}{2}}}$ dato che $x \to -\infty,\ x < 0 \Rightarrow m = -\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^4}{x^4-x^3+\frac{1}{2}x^2}} = -1.$

$q = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+\frac{1}{2}}} - x\right] \Rightarrow q = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x\cdot\sqrt{x^2-x+\frac{1}{2}}}{\sqrt{x^2-x+\frac{1}{2}}}$ razionalizzando il numeratore si ottiene

$$q = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-x^2\cdot\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{x^2-x+\frac{1}{2}}\left(x^2+x\cdot\sqrt{x^2-x+\frac{1}{2}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-\frac{1}{2}x^2}{x^2\cdot\left[\sqrt{x^2-x+\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}\cdot\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)\right]} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x^2\cdot\left[\sqrt{x^2-x+\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}\cdot\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)\right]}$$

Semplificando e dividendo successivamente per x sia il numeratore che il denominatore si ha:

$q = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{2x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}}+1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1}+1}$ da cui $q = \frac{1}{2}$.

Pertanto per $x \to +\infty$ la funzione segue la direzione di equazione $y = x + \frac{1}{2}$

In modo analogo si individua per $x \to -\infty$ l'asintoto di equazione $y = -x - \frac{1}{2}$.

MONOTONIA E PUNTI STAZIONARI:

$f'(x) = \frac{x(2x^2-3x+2)}{\sqrt{(4x^2-4x+2)^3}}$ il numeratore è maggiore o uguale a zero se $x \geq 0$. La funzione presenta nell'origine del sistema di riferimento un punto di minimo assoluto.

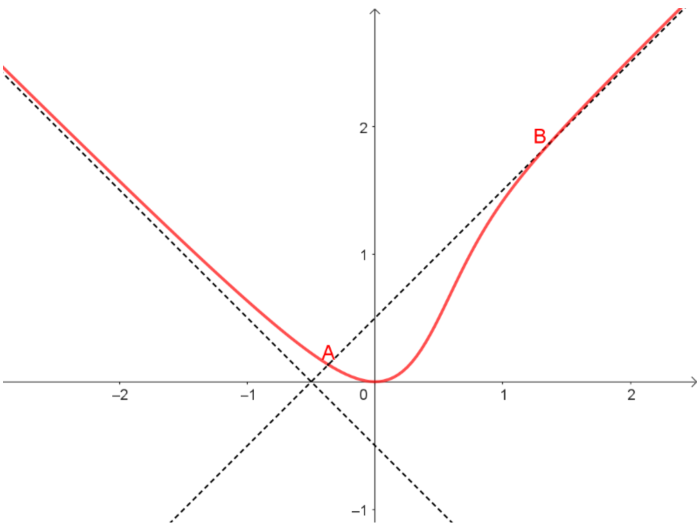
6. Individuate le coordinate dei due punti di intersezione tra il grafico G_f della funzione e l'asintoto obliquo destro della curva, indica con A e B tali punti, successivamente rappresenta il grafico G_f.

Posto $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+\frac{1}{2}}} = x + \frac{1}{2}$, garantita la condizione di accettabilità, data da $x \geq -\frac{1}{2}$, si elevano al quadrato ambo i membri e si considera l'equazione razionale:

$x^4 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)$,

le cui soluzioni, entrambe accettabili, sono $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$. Le relative ordinate si ottengono sostituendo le ascisse nell'equazione dell'asintoto:

$A\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, 1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $B\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



7. Detto M il punto medio di $\overline{AB}$, D il punto di incontro dei due asintoti obliqui ed E il punto di coordinate $\left(\frac{1}{2},0\right)$, calcola l'area del triangolo DEM.

Il punto medio di $\overline{AB}$ è dato dalla media aritmetica delle coordinate dei due punti estremi: $M\left(\frac{1}{2},1\right)$, gli asintoti si intersecano nel punto $D\left(-\frac{1}{2},0\right)$ e il punto $E\left(\frac{1}{2},0\right)$ risulta noto. Il triangolo rettangolo isoscele ha i cateti di misura uno, pertanto l'area del triangolo $A_{DEM}=\frac{1}{2}$.

8. Indicata con A_{DEM} l'area del suddetto triangolo verifica la seguente equivalenza:

$$A_{DEM}=\int_0^{\frac{1}{2}} f'(x)dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f'(x)dx=[f(x)]_0^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\frac{1}{2}} f'(x)dx=f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f'(x)dx=\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

Possiamo concludere che l'area sottesa all'arco di curva espresso dalla funzione derivata prima di $f(x)$ limitatamente all'intervallo $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ è uguale all'area del triangolo DEM.