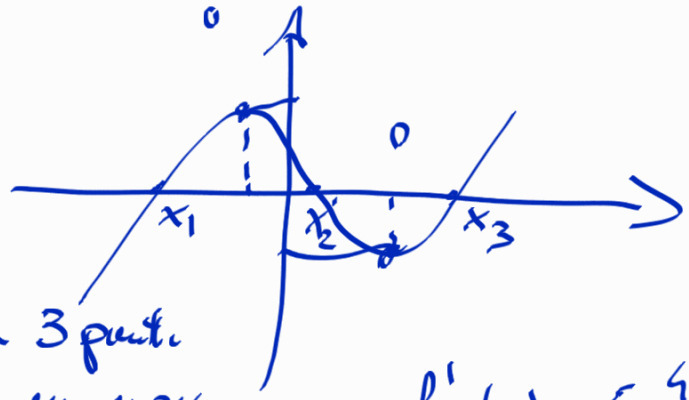
Q8) $f_a(x) = x^5 - 5ax + a$

3 zeri reali!



La funzione deve incontrare l'asse x in 3 punti deve avere almeno un max e un min

$f'_a(x) = 5x^4 - 5a$

$5x^4 - 5a \geq 0 \qquad 5(x^4 - a) \geq 0$ per $a > 0$

$x^4 \geq a$

$x \leq -\sqrt[4]{a} \vee x \geq \sqrt[4]{a}$

$f_a(\sqrt[4]{a}) = a\sqrt[4]{a} - 5a\sqrt[4]{a} + a = -4a\sqrt[4]{a} + a$

$f_a(-\sqrt[4]{a}) = -a\sqrt[4]{a} - 5a(-\sqrt[4]{a}) + a = 4a\sqrt[4]{a} + a$

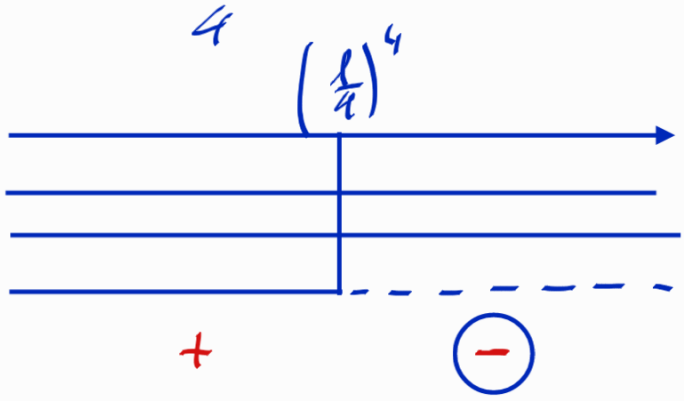
$a^2(-4\sqrt[4]{a} + 1)\cdot(+4\sqrt[4]{a} + 1) \leq 0$ condizione affinché la curva incontri l'asse x in 3 punti (zeri della funzione)

$a^2 \geq 0$ sempre

$4\sqrt[4]{a} + 1 \geq 0$ sempre

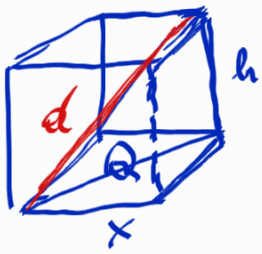
$1 - 4\sqrt[4]{a} \geq 0 \qquad \sqrt[4]{a} \leq \frac{1}{4}$

$a \leq \left(\frac{1}{4}\right)^4$



Soluzioni per $a \geq \frac{1}{256}$

Q4)



Dato che il volume è costante, si pone uguale a K

$$K = x^2 \cdot h \Rightarrow h = \frac{K}{x^2}$$

$$S_T = 2x^2 + 4x \cdot h \Rightarrow S_T = 2x^2 + \frac{4xK}{x^2}$$

sia d la diagonale calcolata in funzione di x.

$$d = \sqrt{(\sqrt{2}\,x)^2 + h^2}$$

$$d = \sqrt{2x^2 + h^2}$$

Sostituendo ad h $\frac{K}{x^2}$

$$d = \sqrt{2x^2 + \left(\frac{K}{x^2}\right)^2}$$

$$d = \sqrt{2x^2 + \frac{K^2}{x^4}}$$

$$d(x) = \frac{\sqrt{2x^6 + K^2}}{x^2}$$

Mentre la funzione superficie totale è

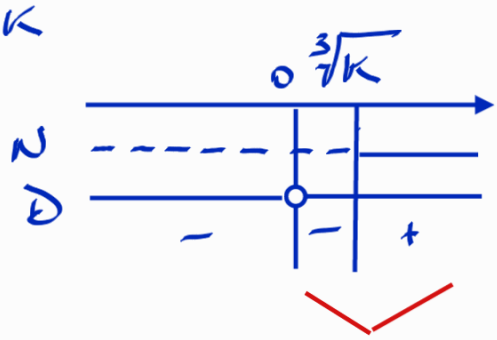
$$S(x) = \frac{2x^3 + 4K}{x}$$

OTTIMIZZAZIONE:

$$S'(x) = \frac{6x^3 - 2x^3 - 4K}{x^2} \Rightarrow S'(x) = \frac{4(x^3 - K)}{x^2}$$

$$S'(x) \geq 0 \Rightarrow x^3 - K \geq 0 \quad x \geq \sqrt[3]{K}$$

$$x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$$



facciamo lo stesso per la funzione diagonale d(x)

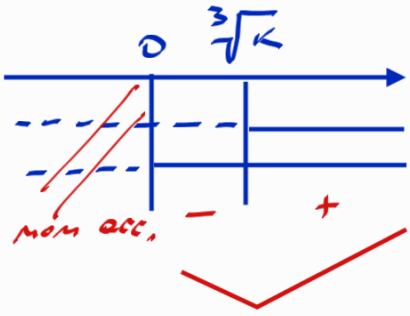
$$d(x) = \frac{\sqrt{2x^6 + K^2}}{x^2} \Rightarrow d'(x) = \left[\frac{\cancel{12}^{\,6}x^5 \cdot x^2}{\cancel{2}\sqrt{2x^6 + K^2}} - 2x\sqrt{2x^6 + K^2}\right] \cdot \frac{1}{x^4}$$

$$d'(x) = \frac{6x^7 - 2x(2x^6 + K^2)}{x^4\sqrt{2x^6 + K^2}} \Rightarrow d'(x) = \frac{6x^7 - 4x^7 - 2K^2x}{x^4\sqrt{2x^6 + K^2}}$$

$d'(x) \geq 0 \qquad \dfrac{2\cancel{x}(x^6-k^2)}{x^{\cancel{3}4}\sqrt{2x^6+k^2}} \geq 0$

$N \geq 0 \qquad x^6-k^2 \geq 0 \qquad x \geq \sqrt[6]{k^2} \Rightarrow x \geq \sqrt[3]{k}$

$D > 0 \qquad x^3 > 0 \Rightarrow x > 0$



Come si evince dal calcolo, le due funzioni presentano un minimo per lo stesso valore di x.

Q5) $y=\sqrt{25-x^2}$ tangente in $x=3$

1° metodo: eq. tangente $y=f'(3)\cdot(x-3)+f(3)$

$f'(x)=\dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{25-x^2}} \Rightarrow f'(3)=-\dfrac{3}{4}$

$f(3)=\sqrt{25-9} \Rightarrow f(3)=4$

$y=-\dfrac{3}{4}(x-3)+4 \Rightarrow y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{25}{4}$

2° metodo

$y=\sqrt{25-x^2}$ è parte della circonferenza di equazione $x^2+y^2=25$ di raggio 5.

Dato che il punto $(3,4)\in\Gamma$, trovo la tangente con la formula di sdoppiamento!

$x\cdot x_0+y\cdot y_0+a\dfrac{x+x_0}{2}+b\dfrac{y+y_0}{2}=25 \quad \text{con} \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$

$3x + 4y = 25$ da cui $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$

Q6) Determinare a e b affinché risulti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - (ax^3 + bx)}{x^3} = 1$$ si tratta di

una f. i. di tipo $\frac{0}{0}$

Applicando De l'Hopital si ha

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - (ax^3 + bx)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 3ax^2 - b}{3x^2} = 1$$

Dato che per $x \to 0$ $3x^2 \to 0$ deve essere ancora una f. i, ossia

$\cos(0) - 3a \cdot (0)^2 - b = 0 \Rightarrow 1 - b = 0$

$b = 1$;

Applichiamo ancora De l'H.

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{sen} x - 6ax}{6x} = 1$$ da cui

$$-\frac{1}{6} \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{1} - \lim_{x \to 0} \frac{a\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1$$

$$-\frac{1}{6} - a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{6} - 1 \Rightarrow a = -\frac{7}{6}$$