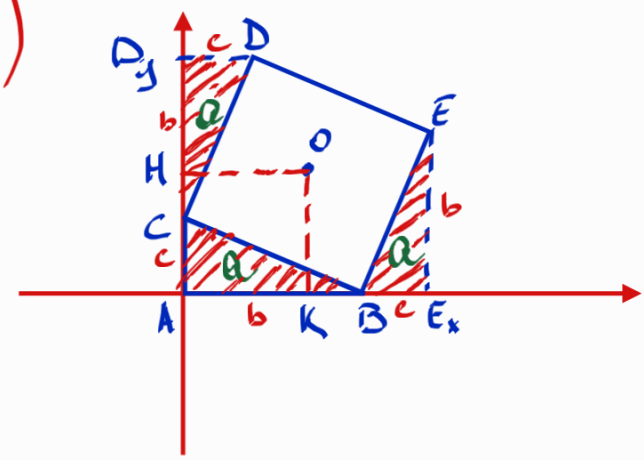
Q1)



VERIFICARE CHE
$\overline{OH} = \overline{OK}$

Dette $(x_0 ; y_0)$ le coordinate di O, si tratta di verificare che $x_0 = y_0$

Siano $(0; c)$ e $(b, 0)$ le coordinate di C e di B

Le coordinate di E e di D sono facilmente deducibili dalla congruenza dei 3 triangoli indicati con la lettera "a".

$E \equiv (b+c ; b)$ $D \equiv (c ; b+c)$ inoltre $C \equiv (0; c)$ $B(b; 0)$

Il punto O, centro del quadrato deve risultare punto medio dei segmenti DB e CE, diagonali del quadrato.

$$\left.\begin{array}{l} M_{DB} = \left(\frac{c+b}{2} ; \frac{b+c}{2}\right) \\ M_{CE} = \left(\frac{b+c}{2} ; \frac{b+c}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow O \equiv \left(\overset{x_0}{\frac{c+b}{2}} ; \overset{y_0}{\frac{c+b}{2}}\right)$$

Avendo il punto O l'ascissa uguale all'ordinata, risulta equidistante dagli assi cartesiani. C.V.D.

Q2) Il dado è truccato pertanto se la probabilità di ottenere una faccia dispari è p, quella di avere la faccia pari corrisponderà a 2p. Lanciando il dado qual è la probabilità che esca un numero primo?

La somma delle probabilità deve sempre dare 1, pertanto

$$\underbrace{p+p+p}_{\text{dispari}} + \underbrace{2p+2p+2p}_{\text{pari}} = 1 \Rightarrow 9p = 1$$

$p = \frac{1}{9}$, mentre $2p = \frac{2}{9}$

I numeri primi sono 2, 3, 5 nel dado e solo 2 è pari.

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(\overset{2}{E_1}) + P(\overset{3}{E_2}) + P(\overset{5}{E_3}) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}$$

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \frac{4}{9}$$

Un numero almeno pari a 3 $\Rightarrow$ $\overset{d}{3}, \overset{p}{4}, \overset{d}{5}, \overset{p}{6}$.

$$P_t = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{2}{3}$$

Un numero al più pari a 3 $\Rightarrow$ $\overset{d}{1}, \overset{p}{2}, \overset{d}{3}$

$$P_t = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9};$$

Q3) Dati i punti: $A \equiv (1; -2; 0)$ $B \equiv (2; 3; -1)$

La retta r ha equazione

$$\frac{x-1}{1-2} = \frac{y+2}{-2-3} = \frac{z-0}{0+1}$$

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z}{+1} \Rightarrow x-1 = \frac{y+2}{5} = -z$$

Il centro della sfera $C \equiv (1; -6; 7)$ dista R dalla retta tangente r. Per trovare R (raggio della sfera) si deve individuare l'equazione del piano α passante per C e perpendicolare a R. $\alpha: (x_B - x_A)\cdot(x - x_C) + (y_B - y_A)(y - y_C) + (z_B - z_A)\cdot(z - z_C) = 0$

$\alpha: 1\cdot(x-1) + 5(y+6) - 1(z-7) = 0$

$\alpha: x + 5y - z + 36 = 0$

Indicato con T il punto in cui α incontra r troviamo le sue coordinate:

$$\begin{cases} x + 5y - z + 36 = 0 \\ x - 1 = \frac{y+2}{5} \\ -z = x - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 5y - z + 36 = 0 \\ y = 5x - 7 \\ z = -x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 5(5x-7) + x - 1 + 36 = 0 \\ y = 5x - 7 \\ z = -x + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 25x + x - 35 - 1 + 36 = 0 \\ y = 5x - 7 \\ z = -x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ y = 5x - 7 \\ z = -x + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = -7 \\ z = 1 \end{cases} \qquad T \equiv (0; -7; 1)$$

$$C \equiv (1; -6; 7)$$

La distanza CT mi fornisce il raggio

$$R = \sqrt{1^2 + (-7+6)^2 + (1-7)^2} \Rightarrow R = \sqrt{1+1+36}$$

$$R = \sqrt{38};$$

Pertanto l'equazione della sfera sarà:

$$(x-1)^2 + (y+6)^2 + (z-7)^2 = (\sqrt{38})^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 12y - 14z + 86 - 38 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 12y - 14z + 48 = 0$$

Q7) Data

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \operatorname{arctg} x & x < 0 \\ ax + b & x \geq 0 \end{cases}$$

Verificare le ipotesi di Rolle!

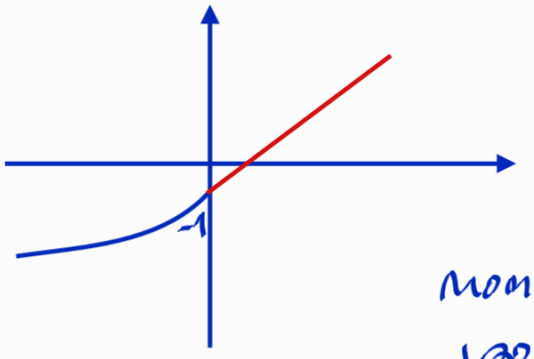
La continuità della funzione può essere compromessa soltanto per valori dei parametri tali che $\operatorname{arctg} x - 1 \neq ax + b$ per $x \to 0$

$$a \cdot (0) + b = \lim_{x \to 0^-} (-1 + \operatorname{arctg} x)$$

$$b = -1 + \operatorname{arctg}(0) \Rightarrow b = -1$$

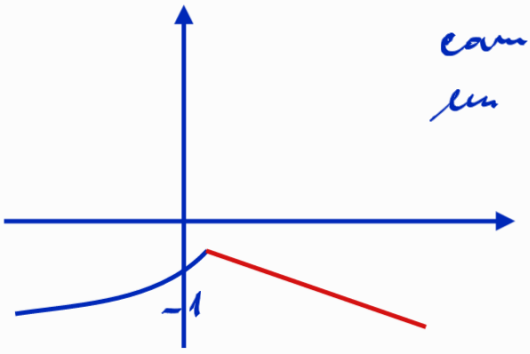
$$f(x) = \begin{cases} -1 + \operatorname{arctg}(x) & x < 0 \\ ax - 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Dato che la funzione $\operatorname{arctg}(x)$ per $x<0$ risulta convessa e monotona crescente, si evidenzia una incompatibilità tra la seconda e la terza ipotesi del teorema di Rolle. Infatti per garantire la derivabilità in $x_0=0$ la retta $y=a\cdot x-1$, deve risultare ascendente per via della convessità della funzione $\operatorname{arctg}(x)$, e quindi $\boxed{a>0}$



In questo caso $f(x)$, anche se derivabile in $x_0=0$ per un valore di $a>0$, non soddisfa la condizione $f(a)=f(b)$ poiché la $f(x)$ diventa monotona crescente in $\mathbb{R}$.

Per $a<0$ la retta risulta discendente e può verificare la condizione $f(a)=f(b)$. Tuttavia risulta compromessa l'ipotesi di derivabilità in $x_0=0$. Infatti si ha un brusco cambiamento di concavità che forma un punto angoloso.



In alternativa si può ricavare il valore di $a>0$ per cui è soddisfatta l'ipotesi di derivabilità in $x_0=0$