

PROBLEMA N°2

Per $a \neq 0$ si consideri $f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a}$
il cui grafico è Ω_a .

a) al variare del parametro a , determinare il dominio, eventuali discontinuità e equazione degli asintoti.

$$\underline{D_{f_a}}: \quad x^2 - a \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq a \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{a}$$

Pertanto per $a > 0$ la funzione è definita $\forall x \in \mathbb{R} - \{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}$
per $a < 0$ la funzione $f_a(x)$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$.

Discontinuità:

Le discontinuità per la funzione si presentano solo se $a > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow (-\sqrt{a})^-} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \frac{a(1+a)}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\sqrt{a})^+} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \frac{a(1+a)}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{a}^-} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \frac{a(1-a)}{0^-} = \begin{cases} -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{a}^+} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \frac{a(1-a)}{0^+} = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \\ -\infty & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

Pertanto le famiglie di funzioni presenta
 per $a > 0$ due discontinuità di seconda
 specie. Per $a = 1$ si ha una disc. eliminabile!

Ricerca degli asintoti:

La funzione presenta 2 asintoti verticali
 di equazioni: $x = -\sqrt{a}$ e $x = \sqrt{a}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{con } a > 0 \\ \text{e } a \neq 1 \end{array} \right.$

Dato che $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = 1 \quad \forall a \neq 0$

$y = 1$ è asintoto orizzontale per la
 funzione.

b) Mostrare che per $a \neq 1$ tutti i grafici Ω_a
 intersecano nello stesso punto $y = 1$.

$$\begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \cancel{x^2} - ax = \cancel{x^2} - a \\ ax - a = 0 \\ x = 1; \end{array}$$

La famiglia di curve Ω_a incontra l'as.
 orizzontale in $(1; 1) \quad \forall a \neq 1$.

Determinazione delle tangenti:

$$f'_a(x) = \frac{(2x - a)(x^2 - a) - 2x(x^2 - ax)}{(x^2 - a)^2}$$

$$f'_a(x) = \frac{\cancel{2x^3} - 2ax - ax^2 + a^2 - \cancel{2x^3} + 2ax^2}{(x^2 - a)^2}$$

$$f'_a(x) = \frac{ax^2 - 2ax + a^2}{(x^2 - a)^2} \text{ in } x_0 = 0 \text{ si ha:}$$

$$f'_a(0) = \frac{a^2}{(0-a)^2} = 1$$

$$\text{Mentre } f_a(0) = \frac{0 - a \cdot 0}{0^2 - a} = 0$$

Dunque la tangente nell'origine è la bisettrice del I e III quadrante $y = x$.

- c) Al variare di $a < 1$ studiare le monotone di $f_a(x)$; necessariamente studiare $f'_a(x)$ e rappresentare Ω_{-1} .

$$f'_a(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{ax^2 - 2ax + a^2}{(x^2 - a)^2} \geq 0$$

$$N \geq 0 \quad ax^2 - 2ax + a^2 \geq 0$$

$$\text{eq. in } ax^2 - 2ax + a^2 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = a^2 - a^3 \Rightarrow a^2(1-a)$$

per $0 < a < 1$ l'equazione ammette soluzioni reali e distinte.

$$x_{1,2} = \frac{a \pm a \cdot \sqrt{1-a}}{a}$$

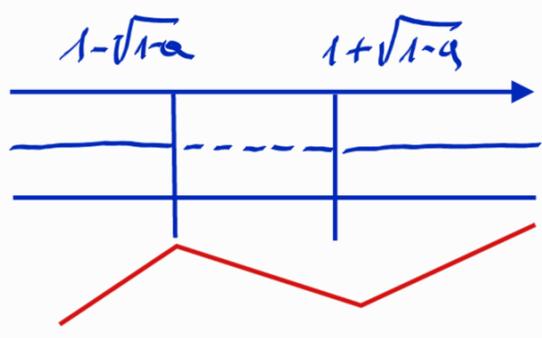
$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-a}$$

$$D > 0 \quad \forall x \in D_{f_a}$$

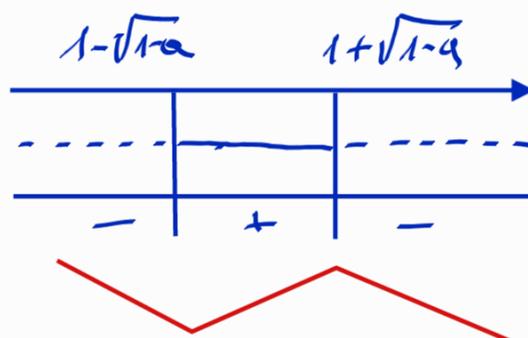
La disequazione ha soluzioni positive esterne alle radici, in quanto a , presente al 1° coeff. risulta positivo

Se $a < 0$ la situazione si ribalta, come si vince dagli schemi:

$0 < a < 1$



$a < 0$



Per $a = -1$ si ha

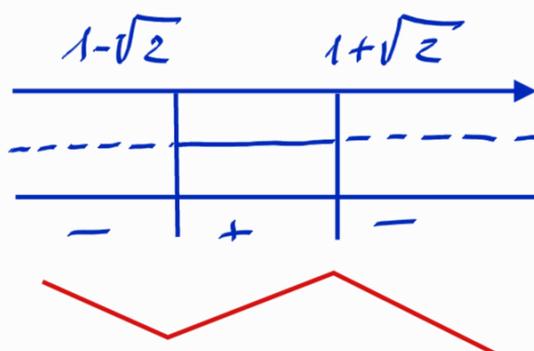
$$f_{-1}(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}$$

$$f'_{-1}(x) = \frac{-2x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

La funzione è definita in tutto \mathbb{R} e presenta soltanto l'asintoto orizzontale $y = 1$

La monotonia della funzione è data da

- presenza di Ω_{-1}
- per $x < 1 - \sqrt{2}$ e $x > 1 + \sqrt{2}$
- decrese per $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$



$$f_{-1}(1 - \sqrt{2}) = \frac{(1 - \sqrt{2})^2 + 1 - \sqrt{2}}{(1 - \sqrt{2})^2 + 1}$$

$$f_{-1}(1 - \sqrt{2}) = \frac{1 + 2 - 2\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2}}{1 - 2\sqrt{2} + 2 + 1} \Rightarrow f_{-1}(1 - \sqrt{2}) = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} \cdot \frac{4 + 2\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}}$$

$$f_{-1}(1 - \sqrt{2}) = \frac{16 + 8\sqrt{2} - 12\sqrt{2} - 12}{16 - 8} \Rightarrow f_{-1}(1 - \sqrt{2}) = \frac{4 - 4\sqrt{2}}{8}$$

$$f_{-1}(1-\sqrt{2}) = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

$$f_{-1}(1+\sqrt{2}) = \frac{(1+\sqrt{2})^2 + 1 + \sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})^2 + 1} \Rightarrow f_{-1}(1+\sqrt{2}) = \frac{1+2\sqrt{2}+2+1+\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}+2+1}$$

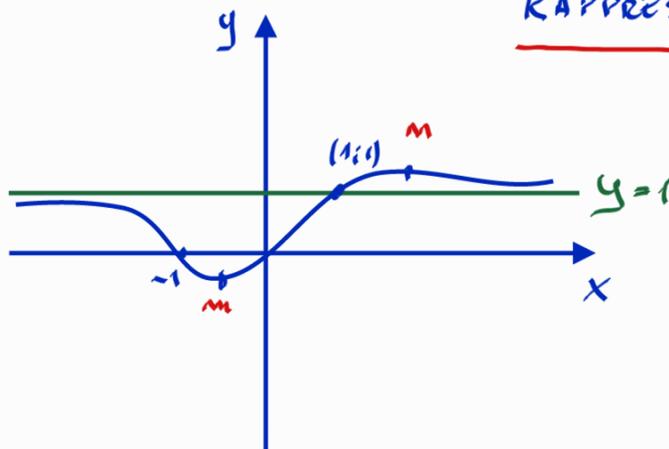
$$f_{-1}(1+\sqrt{2}) = \frac{4+3\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} \cdot \frac{4-2\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} \Rightarrow f_{-1}(1+\sqrt{2}) = \frac{16-8\sqrt{2}+12\sqrt{2}-12}{16-8}$$

$$f_{-1}(1+\sqrt{2}) = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \quad m \equiv \left(1-\sqrt{2}; \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$$

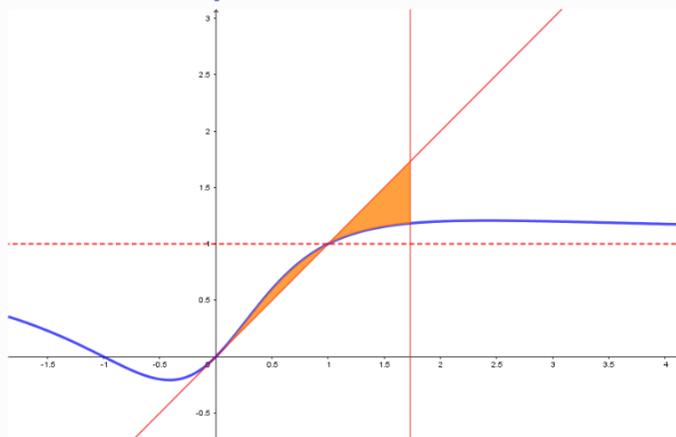
$$M \equiv \left(1+\sqrt{2}; \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$$

Inoltre la funzione incontra l'asse x in $x_0 = 0$ e $x_0 = -1$; incontra l'asintoto orizzontale in $(1; 1)$.

RAPPRESENTAZIONE DI Ω_{-1}



d)



$$\int_1^{\sqrt{3}} \left[x - \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} \right] dx = \int_1^{\sqrt{3}} x dx - \left[\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} dx - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 + 1} dx + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x}{x^2 + 1} dx \right] = \left[\frac{1}{2} x^2 - x + \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_1^{\sqrt{3}} \\ \frac{3}{2} - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} - \ln 2 - \left(\frac{1}{2} - 1 + 0 - \frac{1}{2} \ln 2 \right) =$$

$$\frac{3}{2} - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} - \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} \ln 2 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} \quad (a)$$

$$\int_0^1 \left[\frac{x^2 + x}{x^2 + 1} - x \right] dx = \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx - \int_0^1 x dx \\ = \left[x - \arctan(x) + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} \\ = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln(2) \quad (b)$$

$$S_T = (a) + (b) \Rightarrow S_T = 2 - \frac{1}{2} \ln 2 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln(2)$$

$$S_T = 2 + \frac{1}{2} - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

$$S_T = \frac{5}{2} - \sqrt{3} - \frac{\pi}{6}.$$

RB