

$$\Gamma_1 \text{ parabola } \in [-2; 0] \quad y = a(x+2)^2$$

$$\Gamma_2 \text{ circonferenza } \in [0; 1] \quad x^2 + y^2 + b = 0 \Rightarrow y = \pm \sqrt{-b - x^2}$$

$$\Gamma_3 \text{ iperbole } \in [1; 2] \quad x^2 - y^2 + c = 0 \Rightarrow y = \pm \sqrt{x^2 + c}$$

Per esprimere i luoghi come funzione a tratti si esplicitano rispetto alle g.

$$f_{abc}(x) = \begin{cases} a(x+2)^2 & \text{per } -2 \leq x < 0 \\ \sqrt{-x^2 - b} & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ \sqrt{x^2 + c} & \text{per } 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} a \in \mathbb{R} \\ b < 0 \\ c < 0 \end{array}$$

rispetto del grafico delle iperbole

Dato che la funzione è continua in $[-2; 2]$

$$\left. \begin{aligned} f_{abc}(-2) = 0 &\Rightarrow a(-2+2)^2 = 0 \\ f_{abc}(0) = 1 &\Rightarrow a(0+2)^2 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$(0, 1) \in \Gamma_2 \Rightarrow \sqrt{0^2 - b} = 1 \Rightarrow b < 0 \stackrel{c.e.}{\Rightarrow} \sqrt{-b} = 1 \Rightarrow b = -1$$

$$(1, 0) \in \Gamma_3 \Rightarrow \sqrt{1+c} = 0 \Rightarrow c+1=0 \Rightarrow c=-1;$$

La funzione a tratti estratto dalle famiglie ha
equazione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+2)^2 & \text{per } -2 \leq x < 0 \\ \sqrt{1-x^2} & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ \sqrt{x^2 - 1} & \text{per } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

La funzione non è derivabile negli estremi $x=-2$ e $x=2$
inoltre, come si evince dal grafico ha un punto
angoloso in $x=0$ e una cuspidate in $x=1$

Verifichiamo:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+2) & \text{per } -2 \leq x < 0 \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} & \text{per } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

la funzione è continua in $[-2; 2]$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2}(x+2) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0^-$$

$\ell' \neq \ell'' \Rightarrow$ punto angoloso

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{0^+} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

La funzione presenta un punto di cuspidi
le cui tangenti sono le rette di equazione

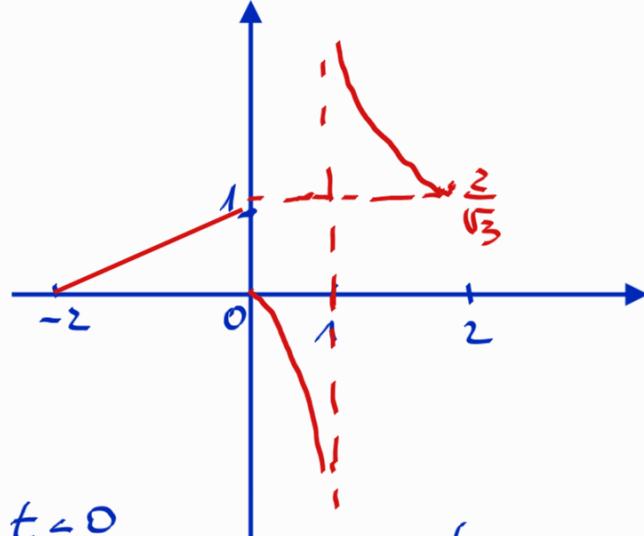
$$x=1,$$

la tangente in $x=0^-$ è $y = \frac{1}{2}x + 1$

la tangente in $x=0^+$ è $y = 1$

Come già detto la tang. nel punto di cuspidi
è $x=1$.

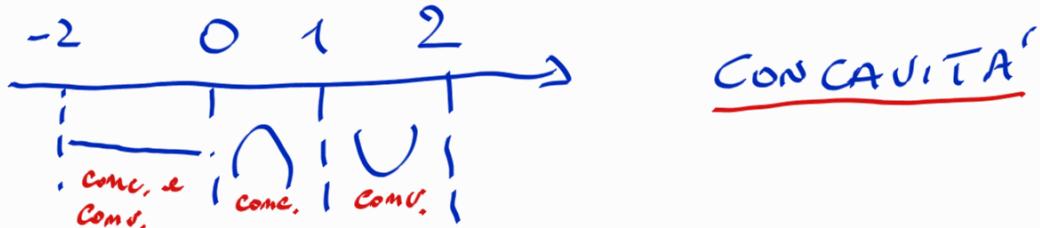
GRAFICO DI $f'(x)$:



$$F(x) = \begin{cases} \left[\frac{1}{2}(t+2) \right]_0^x & -2 \leq t < 0 \\ \left[-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \right]_0^x & 0 \leq t < 1 \\ \left[\frac{t}{\sqrt{t^2-1}} \right]_1^x & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+2) & -2 \leq x < 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$F'(x) = \begin{cases} \left(-\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) \frac{1}{1-x^2} &= \frac{-1+x^2-x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \\ \left(\sqrt{x^2-1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} \right) \frac{1}{x^2-1} &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}(x^2-1)} \end{cases}$$



c) $y = \frac{1}{4}(x+2)^2$ si tratta di una funzione monotone crescente per $x > -2$ pertanto in $[-2; 0]$ viene crescente di parabola

$$4y = (x+2)^2 \Rightarrow \text{per } y \geq 0 \quad x+2 = \pm \sqrt{4y}$$

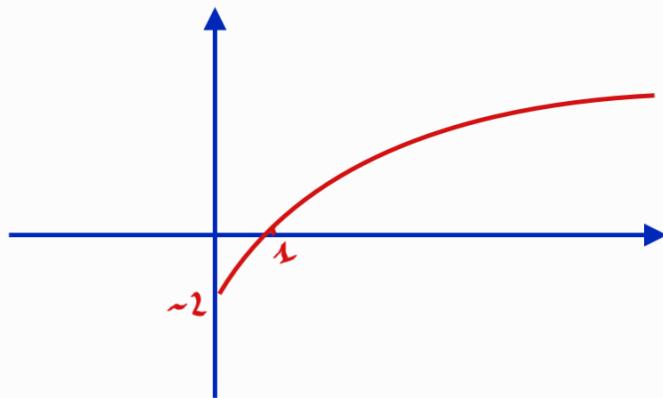
$x = -2 \pm 2\sqrt{y}$ a destra di -2 si ha

$$x = -2 + 2\sqrt{y} \quad \text{orvero l'inversa sarà}$$

$$h(x) = 2(\sqrt{x} - 1)$$

$$h'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad h'(x) \text{ è derivabile}$$

$\forall x > 0$



$$d) \int_{-2}^K \frac{1}{4} (x+2)^2 dx = \int_K^0 \frac{1}{4} (x+2)^2 dx$$

com $-2 \leq K \leq 0$

$$\int f'(x) [f(x)]^2 dx =$$

$$= \left[\frac{3}{4} \cdot (x+2)^3 \right]_{-2}^K = \left[\frac{3}{4} (x+2)^3 \right]_K^0 =$$

$$= \frac{3}{4} (K+2)^3 = 6 - \frac{3}{4} (K+2)^3$$

$$\frac{3}{2} (K+2)^3 = 6 \quad (K+2)^3 = \frac{12}{3} \quad 4$$

$$K+2 = \sqrt[3]{4} \Rightarrow K = \sqrt[3]{4} - 2$$

BB