



## LABORATORIO DI MATEMATICA: STUDIO DI FUNZIONE

Data la funzione:

[G.B. 2023]

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x}$$

Si consideri la famiglia di trasformate  $g_k(x)$ , compressa orizzontalmente di un fattore  $k$  e traslata di vettore  $\vec{v} = (k, 0)$ .

1. Scrivi l'equazione di  $g_k(x)$ .
2. Determina il valore di  $k$  sapendo che la trasformata  $g(x)$  e la funzione  $f(x)$  hanno il massimo nello stesso punto di ascissa.
3. Posto  $k = 2$  studia e rappresenta la funzione  $y = g(x)$ .
4. Dimostra che esiste un solo punto di ascissa  $x_0$ , in cui  $g(x_0) = 1$  e che tale ascissa è un numero reale minore di uno.

## Quesiti tratti da Zanichelli (simulazioni)

1. Considera la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax^2(x+2) + bx - 8a, & \text{se } x < 2 \\ \ln(x-1), & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Determina per quali valori dei parametri reali  $a$  e  $b$  la funzione è ovunque continua e derivabile.

2. Considera la funzione

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2}{p(x)},$$

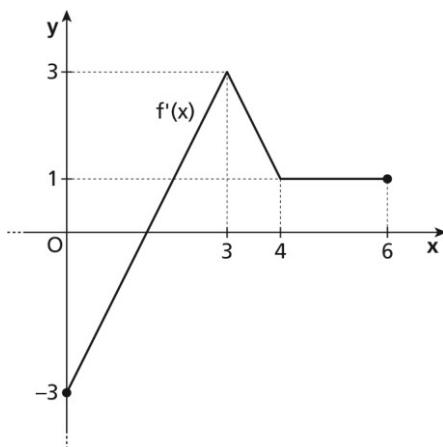
dove  $p(x)$  è un polinomio.

Determina  $p(x)$  sapendo che il grafico di  $f(x)$  presenta un asintoto obliqua di equazione  $y = \frac{1}{2}x + 1$  e che in  $x = 4$  presenta un punto di singolarità eliminabile.

3. Nella figura è rappresentato il grafico della funzione  $f'(x)$ , derivata prima della funzione  $f(x)$  definita nell'intervallo  $[0; 6]$ .

Ricava l'espressione di  $f(x)$  sapendo che  $f(0) = 0$  e rappresentala graficamente.

Stabilisci se la funzione  $f(x)$  soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo  $[0; 6]$  e determina gli eventuali punti che soddisfano il teorema.



## PROBLEMA

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x}$$

1) traslata di vettore  $\vec{J} = (k; 0)$

$g_k(x) = \frac{(x-k)^2}{e^{x-k}}$  compressione orizzontale di funzione  $f$

$$g_k(x) = \frac{(kx-k)^2}{e^{kx-k}} \quad \text{oppure} \quad g_k(x) = \frac{k^2(x-1)^2}{e^{k(x-1)}}$$

2) trovare il valore di  $k$  affinché  $f(x)$  e  $g(x)$  hanno un max nello stesso punto di ascissa.

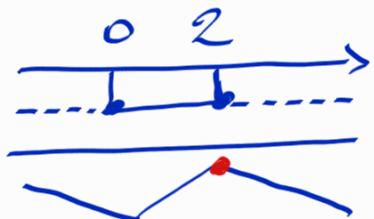
$$f'(x) = \frac{2x \cdot e^x - x^2 e^x}{e^{2x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

punto  $f'(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{2x - x^2}{e^x} \geq 0$

$$N \geq 0 \quad x^2 - 2x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

$$\mathbb{D} > 0 \quad e^x > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

$f(x)$  ha un massimo nel punto di ascissa  $x=2$ .



$g'_k(2)=0$  è la condizione perché la trasformata abbia un massimo in  $x=2$ .

$$g_k(x) = \frac{k^2(x-1)^2}{e^{k(x-1)}} \quad g'_k(x) = \frac{2k^2(x-1) \cdot e^{k(x-1)} - k^2(x-1)^2 \cdot k \cdot e^{k(x-1)}}{e^{2k(x-1)}}$$

$$g'_k(x) = \frac{k^2(x-1) \cdot e^{k(x-1)} [2 - k(x-1)]}{e^{2k(x-1)}}$$

$$g'(2) = \frac{k^2(2-1) \cdot [2-k(2-1)]}{e^{k(2-1)}}$$

Sapendo che  $g'(2) = 0$

$$\frac{k^2(2-k)}{e^k} = 0 \quad \begin{cases} k=0 \\ k=2 \end{cases}$$

degenera in una retta orizzontale  
compatibile

3) 
$$g(x) = \frac{4(x-1)^2}{e^{2(x-1)}}$$

Domini delle funzione:  $\forall x \in \mathbb{R}$

la funzione non presenta simmetrie

$$\cap y \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ y = \frac{4(x-1)^2}{e^{2(x-1)}} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ y = \frac{4}{e^{-2}} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ y = 4 \cdot e^2 \end{array} \right. \quad B = (0; 4e^2)$$

$$\cap x \left\{ \begin{array}{l} y=0 \\ \frac{4(x-1)^2}{e^{2(x-1)}} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y=0 \\ x=1 \end{array} \right. \quad A = (1; 0)$$

Segno di  $g(x)$ :  $g(x) > 0$

$$\frac{4(x-1)^2}{e^{2(x-1)}} > 0 \Rightarrow \begin{array}{ll} N > 0 & (x-1)^2 > 0 \quad \forall x \neq 1 \\ D > 0 & \forall x \in \mathbb{R} \end{array}$$

La funzione è positiva  $\forall x \in \mathbb{R}$ , escluso  $x=1$ , in cui presenta uno zero doppio.

Comportamento agli estremi:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4(x-1)^2}{e^{2(x-1)}} = \frac{\infty}{\frac{1}{e^\infty}} = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4(x-1)^2}{e^{2(x-1)}} = \frac{+\infty^2}{e^\infty}$  per la gerarchia degli infiniti si ricorda che l'infinito è più grande dell'infinito dell'esponentiale delle funz. algebriche.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0^+$$

$y = 0$  è un asintoto orizzontale destro!

Monotonia:

$$g'(x) = \frac{8(x-1) \cdot e^{2(x-1)} - 4(x-1)^2 \cdot 2 \cdot e^{2(x-1)}}{e^{4(x-1)}}$$

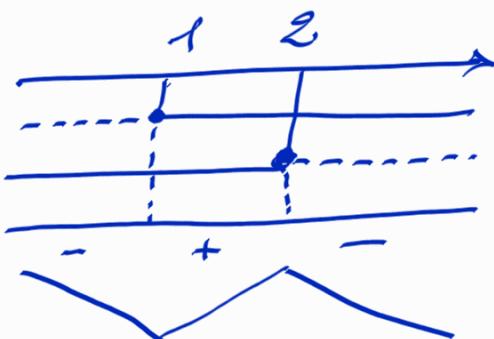
$$g'(x) = \frac{e^{2(x-1)} \cdot 8(x-1) \cdot (1-x+1)}{e^{4(x-1)}}$$

$$g'(x) = \frac{8(x-1)(2-x)}{e^{2(x-1)}} \quad \text{posto } g'(x) \geq 0$$

$$x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

$$2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

$$e^{2(x-1)} > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$



La funzione presenta

un minimo per  $x=1$  e un massimo per  $x=2$ .

$$g(1) = \frac{4(1-1)}{e^{2(1-1)}} \Rightarrow g(1) = 0 \quad P_m = (1; 0)$$

$$g(2) = \frac{4(2-1)}{e^{2(2-1)}} \Rightarrow g(2) = \frac{4}{e^2} \quad P_M = (2; \frac{4}{e^2})$$

Concavità:

$$g''(x) \geq 0 \quad g'(x) = \frac{8(x-1)(2-x)}{e^{2(x-1)}}$$

$$g'(x) = \frac{8(-x^2 + 3x - 2)}{e^{2(x-1)}}$$

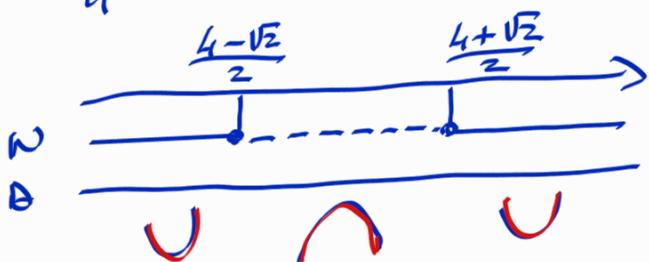
$$g''(x) = \frac{8(-2x+3) \cdot e^{2(x-1)} - 16(-x^2 + 3x - 2) \cdot e^{2(x-1)}}{e^{4(x-1)}}$$

$$g''(x) = \frac{8 \cdot e^{2(x-1)} \left[ -2x+3 - 2(-x^2 + 3x - 2) \right]}{e^{4(x-1)}}$$

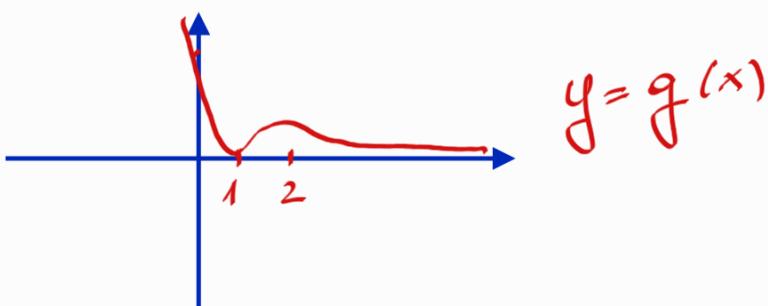
$$g''(x) = \frac{8[-2x+3 + 2x^2 - 6x + 4]}{e^{2(x-1)}}$$

$$g''(x) \geq 0 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 7 \geq 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 16 - 14 = 2 \quad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{2}}{2} \Rightarrow x \leq \frac{4-\sqrt{2}}{2} \vee x \geq \frac{4+\sqrt{2}}{2}$$



la funzione presenta  
due fletri a tangente  
obliqua!



- 4) Il punto  $g(x_0)=1$  composta che  $\frac{4(x_0-1)}{e^{2(x_0-1)}} = 1$

$$\text{quindi } 4(x_0 - 1)^2 = e^{2(x_0 - 1)}$$

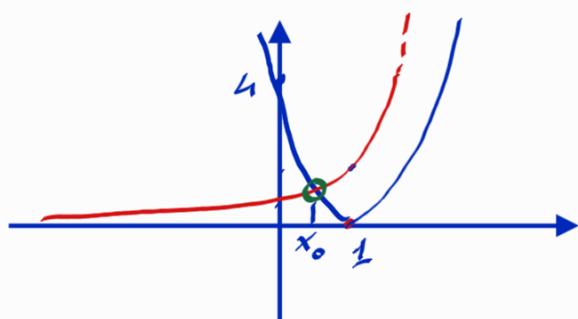
considerando le due funzioni

$$y = 4(x-1)^2 \text{ e } y = e^{2(x-1)}$$

l'uguaglianza si ottiene nei punti in cui si incontrano le due curve.

$x_0$  esiste e deve essere necessariamente  $< 1$  in quanto la funzione esponentiale per  $x > 1$  è sempre maggiore della funzione

algebrica. Inoltre è unico in quanto la funzione  $g(x)$  nel punto di ascissa  $x=2$  raggiunge il punto di massimo che ha ordinata



B2

$$\frac{4}{e^2} < 1.$$

## QUESTI

1) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax^2(x+2) + bx - 8a & se x < 2 \\ \ln(x-1) & se x \geq 2 \end{cases}$$

Determinare  $a$  s.t. affinché  $f(x)$  sia continua e derivabile in  $\mathbb{R}$

La continuità in  $\mathbb{R}$  prevede che la funzione sui due tratti converga a uno stesso valore per  $x \rightarrow 2$ . Infatti  $\ln(x-1)$  è definita per  $x > 1$  ma si sviluppa a partire da  $x=2$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \quad \text{continuità}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} [ax^2(x+2) + bx - 8a] = \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-1)$$

$$16a + 2b - 8a = \ln(2-1)$$

$$8a + 2b = 0$$

$$f'_-(2) = f'_+(2) \quad \text{derivabilità in 2}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax(x+2) + ax^2 + b & \text{se } x < 2 \\ \frac{1}{x-1} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

$$4a(4) + 4a + b = \frac{1}{2-1} \Rightarrow 20a + b = 1$$

$$\begin{cases} 8a + 2b = 0 & \text{continuità in } x=2 \\ 20a + b = 1 & \text{derivabilità in } x=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 1 - 20a \\ 8a + 2 - 40a = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -\frac{1}{4} \\ a = \frac{1}{16} \end{cases}$$

2)

$$y = \frac{x^3 - 4x^2}{p(x)} \quad \text{Determinare il polinomio } p(x)$$

Sappiamo che la funzione ha un asintoto obliqua  
oltre che l'equazione  $y = \frac{1}{2}x + 1$  è una discontinuità  
eliminabile in  $x=4$ .

$$m = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad q = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2}{x \cdot p(x)} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x^2 \text{ è il 1° termine del polinomio } p(x)$$

$$\text{Quindi } p(x) = 2x^2 + bx + c$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^3 - 4x^2}{2x^2 + bx + c} - \frac{1}{2}x \right] = 1$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^3 - 4x^2 - \cancel{\frac{1}{2}x^3} - \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{2}cx}{2x^2 + bx + c} \right] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(-4 - \frac{1}{2}b\right)x^2 - \frac{1}{2}cx}{2x^2 + bx + c} = 1 \Rightarrow \frac{-4 - \frac{1}{2}b}{2} = 1$$

$$\text{da cui } -4 - \frac{1}{2}b = 2 \Rightarrow -\frac{1}{2}b = 6 \Rightarrow b = -12$$

$2x^2 - 12x + c$  deve avere uno zero in  $x=4$

$$2(4)^2 - 12(4) + c = 0 \Rightarrow 32 - 48 + c = 0 \Rightarrow c = 16$$

$$p(x) = 2x^2 - 12x + 16$$

$$3) f'(x) = \begin{cases} 2x-3 & 0 \leq x < 3 \\ -2x+9 & 3 \leq x < 4 \\ 1 & 4 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

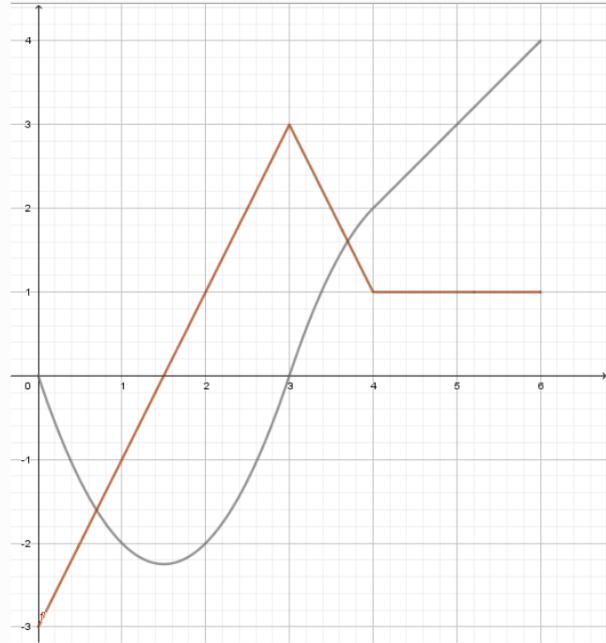
$$f(x) = \begin{cases} x^2-3x & 0 \leq x < 3 \\ -x^2+9x-18 & 3 \leq x < 4 \\ x-2 & 4 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

Dato che il 1° tratto passa per l'origine

$$f(0)=0 \Rightarrow \text{termine noto } c=0$$

Dato che il 1° tratto per  $x=3$  avrebbe avuto ordinata zero, si impone per continuità che il 2° tratto passi per zero  $-(3)^2 + 9(3) + c = 0$  da cui  $c = -18$ , e così si procede per il 3° tratto.

Teorema di Lagrange



Hipotesi di continuità soddisfatta in  $[0; 6]$

Hipotesi di derivabilità soddisfatta in  $(0; 6)$

$$\exists x_0 \in (0; 6) : \frac{f(6) - f(0)}{6 - 0} = f'(x_0)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-3 & 0 \leq x < 3 \\ -2x+9 & 3 \leq x < 4 \\ 1 & 4 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

$$f(6) = 4 \Rightarrow f'(x_0) = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x_0 - 3 = \frac{2}{3} \\ -2x_0 + 9 = \frac{2}{3} \\ 1 = \frac{2}{3} \text{ mai} \end{cases}$$

$$x_0 = \frac{11}{6} \quad 0 \leq x_0 < 3$$

$$x_0 = \frac{25}{6} \quad 3 \leq x_0 < 4$$

fuori intervallo

$$x_0 = \frac{11}{6}$$

BB -