



Imprenditori coraggiosi:

Questi ultimi anni sono stati segnati da eventi, tanto drammatici quanto inattesi. Un microrganismo ha messo in ginocchio tutti i popoli della terra, senza distinzioni sociali, geografiche, culturali, La tutela della salute umana ha imposto una serie di restrizioni che inevitabilmente hanno prodotto uno scossone in ambito economico, cambiando il destino di tantissime aziende.

In questi momenti di enorme difficoltà il mercato mondiale vacilla e in tutti i settori produttivi affiora un pervasivo pessimismo. Ma, in queste situazioni, il coraggio e la resilienza di molti favoriscono un più rapido ritorno alla normalità.

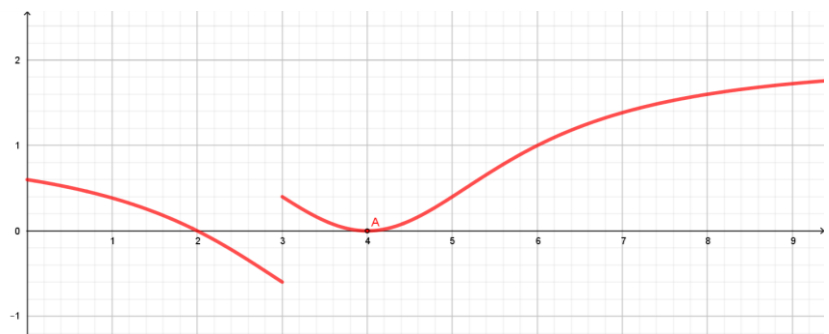
Una virtuosa azienda manifatturiera con una invidiabile tradizione familiare subisce, come tutte le altre attività, un notevole calo degli ordini, e quindi della produzione.

Di seguito riportiamo la funzione bilancio, che con buona approssimazione ripercorre le vicissitudini dell'azienda e fornisce una stima delle proiezioni future. Data la funzione $b(x)$, si riporti sull'asse delle ascisse il tempo in anni e sull'asse delle ordinate il relativo bilancio in milioni di euro.

$$b(x) = \begin{cases} 1 - \frac{8}{(x-4)^2 + 4} & 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{2 \cdot (x-4)^2}{x^2 - 8x + 20} & x > 3 \end{cases}$$

Al fine di rispondere ai seguenti quesiti con opportune argomentazioni, si studi la funzione e se ne rappresenti il grafico

Funzione definita a tratti e continua in $\mathbb{R}^+ - \{3\}$, punto in cui presenta una discontinuità di prima specie; andamento negativo per $x \in [2; 3]$ e positivo altrove; la funzione incontra l'asse delle



ordinate in $(0; \frac{3}{5})$ e l'asse delle ascisse in $x_1 = 2$ e $x_2 = 4$, in quest'ultimo punto di ascissa presenta uno zero doppio.

Comportamento agli estremi: $y = 2$ asintoto orizzontale destro;

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} b(x) = -\frac{3}{5}; \lim_{x \rightarrow 3^+} b(x) = \frac{2}{5}.$$

Monotonia:

$$b'(x) = \begin{cases} \frac{16 \cdot (x-4)}{(x^2 - 8x + 20)^2} & 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{16 \cdot (x-4)}{(x^2 - 8x + 20)^2} & x > 3 \end{cases}$$



decescente nell'intervallo $[0; 4]$, crescente $]4; +\infty[$ con min in $(4; 0)$.

Concavità e convessità (non indispensabile): la funzione è rispettivamente concava, convessa, concava e presenta due flessi a tangente obliqua negli zeri della derivata seconda $b''(x) = \frac{16 \cdot (-3x^2 + 24x - 44)}{(x^2 - 8x + 20)^3}$, ovvero

$$x_{2,3} = 4 \pm 2 \frac{\sqrt{3}}{3};$$

1. Fornisci il bilancio dell'azienda all'inizio dell'osservazione (600.000 euro)

$$b(0) = \frac{3}{5} \Rightarrow \text{bilancio iniziale} = \frac{3}{5} \cdot 10^6 \text{ euro}$$

2. Determina il tempo che deve trascorrere perché il bilancio dell'azienda risulti in perdita
Allo scadere del secondo anno di indagine il bilancio aziendale si azzerava e successivamente diventa negativo.
3. Dal grafico rileva il numero di mesi in cui il bilancio rimane in perdita
Il bilancio rimane in perdita tra il secondo e il terzo anno, per 12 mesi.

Raggiunto il minimo storico, l'azienda decide di aumentare il capitale al fine di sostenere le spese e investire in innovazione e ricerca.

4. A quanto ammonta il bilancio negativo prima dell'investimento?
Il bilancio negativo prima dell'investimento corrisponde al punto di minimo assoluto per la funzione a tratti, sebbene non si tratti di un punto stazionario, ovvero -600000 euro.
5. Quale dato, nello studio della funzione, fornisce l'entità del rifinanziamento e a quanto ammonta il nuovo investimento societario?
L'entità del finanziamento è espressa dal salto della discontinuità di prima specie, che risulta pari a $\left| \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \right| = 1$, che corrisponde a un milione di euro.
6. Da cosa si deduce che i due tratti sono in realtà una traslazione della stessa funzione prodotta dall'incremento di capitali?

Si deduce dal fatto che la derivata della funzione è la stessa per entrambi i tratti, ciò comporta che i due tratti appartengono alla stessa famiglia di primitive. In alternativa, intervenendo con passaggi algebrici sui due tratti, si verifica che il secondo tratto è traslato verticalmente verso l'alto di una unità, corrispondente al milione di reinvestimento di capitali sull'azienda. Infatti i due tratti differiscono di 1.

$$\frac{2 \cdot (x-4)^2}{x^2 - 8x + 20} - \left[1 - \frac{8}{(x-4)^2 + 4} \right] \Rightarrow \frac{2 \cdot (x-4)^2}{x^2 - 8x + 20} - \left[\frac{(x-4)^2 + 4 - 8}{(x-4)^2 + 4} \right] \Rightarrow$$
$$\frac{2 \cdot (x-4)^2}{(x-4)^2 + 4} - \left[\frac{(x-4)^2 - 4}{(x-4)^2 + 4} \right] \Rightarrow \frac{(x-4)^2 + 4}{(x-4)^2 + 4} = 1$$

Il team per l'innovazione e la ricerca non produce benefici immediati. Infatti dopo un periodo di operatività il bilancio chiude in pareggio, ovvero l'azienda copre tutte le spese ma non rimane alcun beneficio economico per gli azionisti.

7. Dall'investimento di nuovi capitali, quanto tempo trascorre prima di rivedere il bilancio in crescita? (un anno e precisamente tra il terzo e il quarto)
8. Grazie all'investimento nel campo dell'innovazione tra il quarto e l'ottavo anno vi è stata una forte crescita del bilancio. Qual è stato il valore medio nel corso del quadriennio?

Per il teorema della media integrale $\frac{1}{8-4} \cdot \int_4^8 \frac{2 \cdot (x-4)^2}{x^2 - 8x + 20} dx = \text{valore medio bilancio}$



$$\frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \int_4^8 \frac{(x-4)^2}{x^2 - 8x + 20} dx = \frac{1}{2} \int_4^8 \left[1 - \frac{4}{x^2 - 8x + 20} \right] dx$$

$$\frac{1}{2} \int_4^8 \left[1 - \frac{4}{(x-4)^2 + 4} \right] dx = \frac{1}{2} \int_4^8 dx - \frac{1}{2} \int_4^8 \frac{1}{\left(\frac{x-4}{2}\right)^2 + 1} dx$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left[x - 2 \cdot \arctan\left(\frac{x-4}{2}\right) \right]_4^8 \cong 0,8929$$

Pertanto il valore medio è di circa 892.900 euro.

9. *Stando alle previsioni fornite dal modello matematico, quali possono essere, in termini di bilancio, le aspirazioni future dell'azienda (fornisci la risposta in milioni di euro)?
al tendere di t all'infinito la funzione tende a 2, quindi il bilancio di previsione è di 2 milioni di euro*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot (x-4)^2}{x^2 - 8x + 20} = 2.$$