SVOLGIMENTO PROBLEMA 1

Sia

$$f(x) = ae^x + be^{-x} + cx + d$$

con a, b, c e d numeri reali.

1. Si determinino a, b, c e d in modo che la funzione soddisfi le seguenti condizioni:

   - $P(0; 1)$ sia un punto di estremo relativo;
   - La derivata seconda $f''(x)$ sia una funzione pari;
   - $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{e^2-1}{2e}$.

I parametri da determinare sono quattro, quindi dovremo impostare un sistema di quattro equazioni indipendenti nelle incognite a, b, c e d.

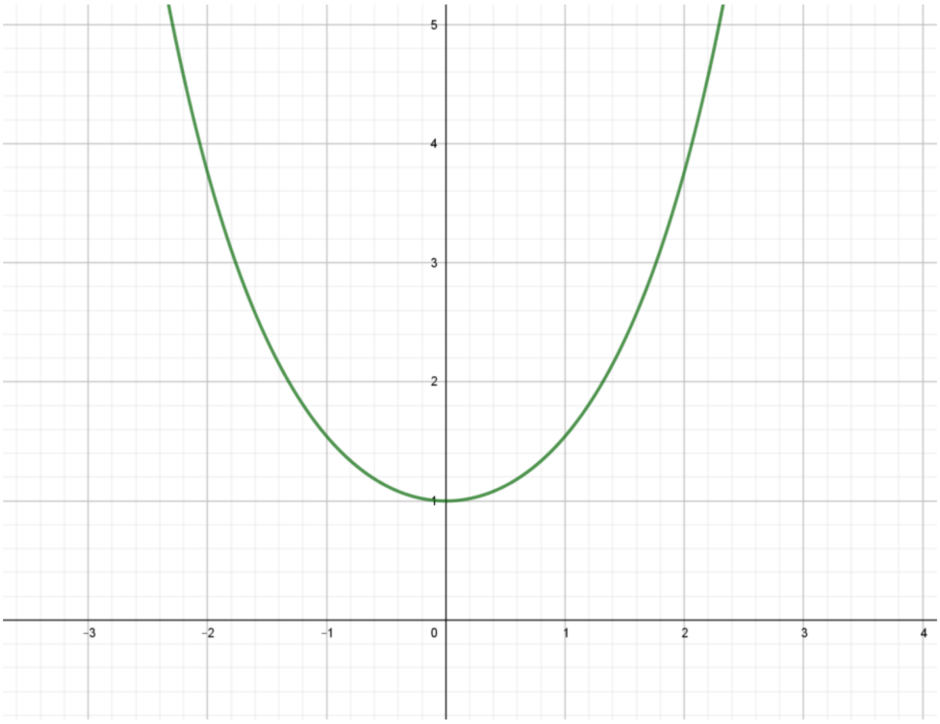
- Il punto $P(0,1)$ è un punto della funzione, pertanto deve aversi che $f(0) = 1$, cioè $a + b + d = 1$;
- Il punto $P(0,1)$ è anche un punto stazionario per la funzione e ciò comporta che $f'(0) = 0$. La derivata di $f(x)$ è $f'(x) = ae^x - be^{-x} + c$, da cui si deduce che $a - b + c = 0$;
- La derivata seconda $f''(x) = ae^x + be^{-x}$ deve essere pari, cioè $f''(x) = f''(-x)$, quindi $ae^x + be^{-x} = ae^{-x} + be^x, \forall x \in R \leftrightarrow a(e^x - e^{-x}) = b(e^x - e^{-x})$, da cui, poiché l'uguaglianza deve valere per ogni x, si ottiene $a = b$.
  L'informazione $a = b$ insieme con $a - b + c = 0$ e $a + b + d = 1$, conduce a ricavare $c = 0$ e $d = 1 - 2a$. La funzione $f(x)$ si riduce a $f(x) = ae^x + ae^{-x} + 1 - 2a$.

- $\int_0^1 f(x)dx = [ae^x - ae^{-x} + (1-2a)x]_0^1 = ae - \frac{a}{e} + 1 - 2a$. L'ultima condizione diventa:
  $$ae - \frac{a}{e} + 1 - 2a = \frac{e^2-1}{2e} \rightarrow a\left(e - \frac{1}{e} - 2\right) = \frac{e^2-1}{2e} - 1 = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e} - 2\right)$$
  si ricava $a = \frac{1}{2}$.
  La funzione diventa $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$

---

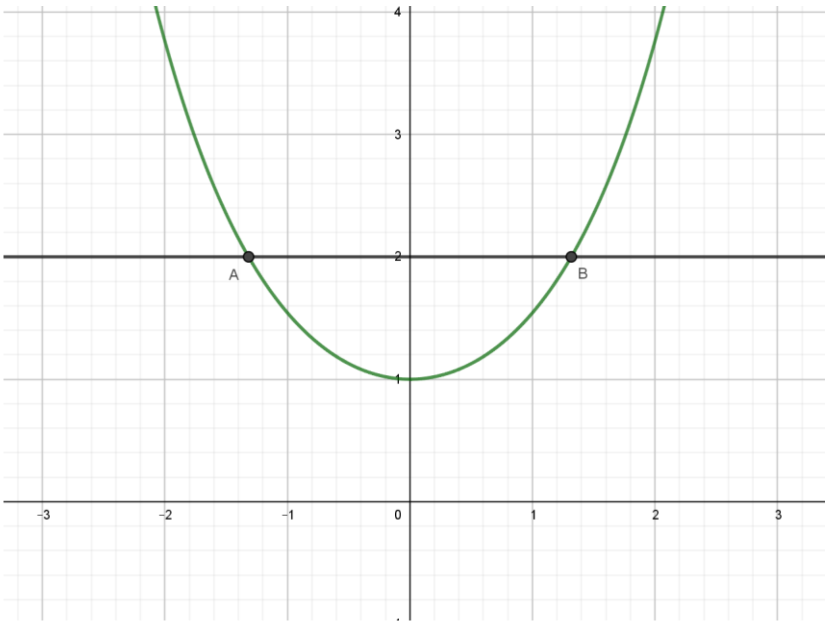
2. Dopo aver verificato che la funzione ottenuta è $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, la si studi e se ne disegni il grafico Γ.

Si tratta di una funzione pari definita e positiva in R. La derivata prima $f'(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ si annulla soltanto in $x = 0$ ed è positiva per $x > 0$. Si ricava che $f(x)$ decresce in $]-\infty, 0[$ e cresce in $]0, +\infty[$, pertanto $P(0,1)$ è un minimo. Poiché $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, P è un punto di minimo assoluto. Infine, poiché la derivata seconda $f''(x)$=$f(x)$, la funzione rivolge la concavità verso l'alto. Il grafico ha il seguente andamento:



---

3. Detta r la retta di equazione $y = 2$, si determini la lunghezza della corda da essa intercettata su Γ e si calcoli l'area della regione finita di piano racchiusa tra Γ e r.



La retta $y = 2$ interseca la funzione in due punti A e B le cui ascisse sono le soluzioni dell'equazione esponenziale $\frac{e^x+e^{-x}}{2} = 2$. Risolvendo si ricavano $x_A = \ln(2-\sqrt{3})$ e $x_B = \ln(2+\sqrt{3})$. La lunghezza della corda AB è allora $x_B - x_A = \ln(2+\sqrt{3}) - \ln\ (2-\sqrt{3}) = \ \ln\ \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 2\ln\ (2+\sqrt{3})$.

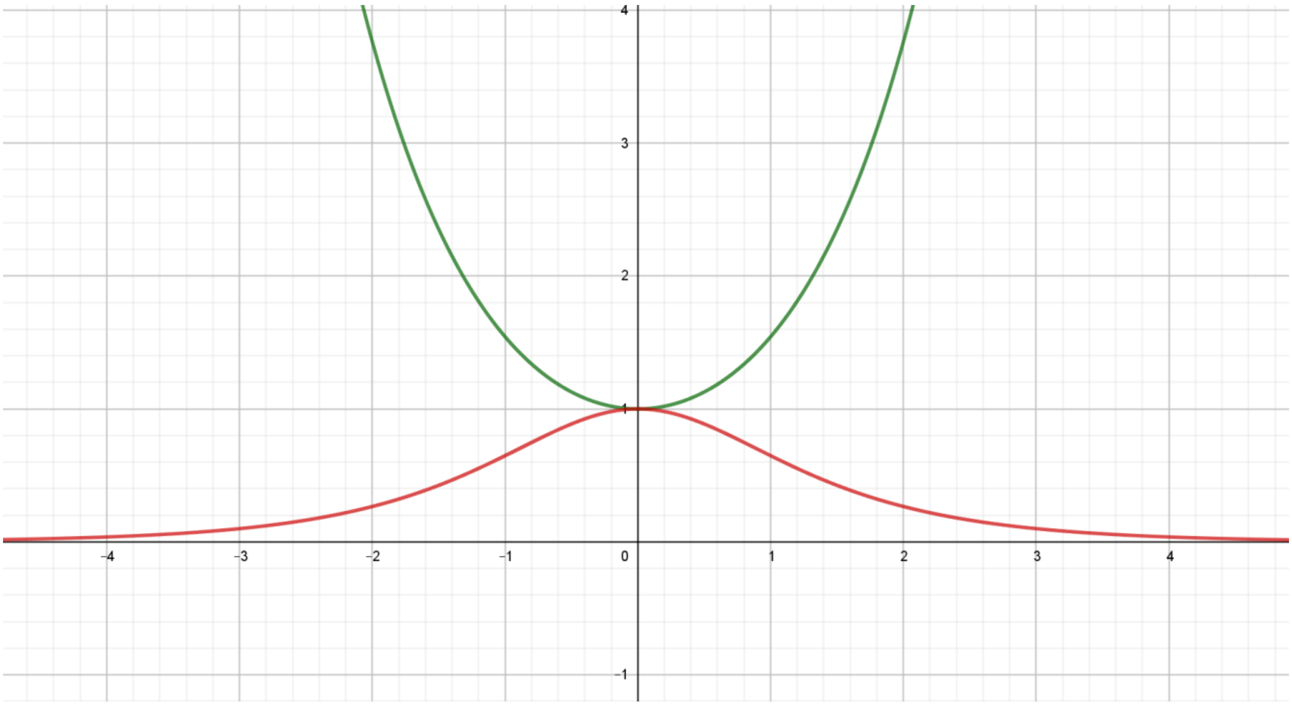
Per calcolare l'area richiesta, sfruttando la simmetria della figura, si deve calcolare l'integrale definito $2\int_0^{\ln(2+\sqrt{3})}(2-f(x))dx = 4x-(e^x-e^{-x})]_0^1 = 4\ln(2+\sqrt{3})-\left(2+\sqrt{3}-\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right) = 4\ln\left(2+\sqrt{3}\right)-2\sqrt{3} \approx 1.8.$

---

4. Dal grafico di $f(x)$ si ricavi quello della funzione reciproca $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ e si dimostri che l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{f(x)}dx$ è convergente.

Poiché $f(x)$ è definita e positiva in R anche $g(x)$ è definita e positiva in R. Inoltre, anche $g(x)$ è pari come $f(x)$.

Poiché $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty \to \lim_{x\to\pm\infty} g(x)=0$, quindi $g(x)$ ha l'asse x come asintoto orizzontale. Infine, poiché $f(x)$ decresce in $]-\infty,0[$, cresce in $]0,+\infty[$ ed ha $P(0,1)$ come minimo, $g(x)$ cresce in $]-\infty,0[$, decresce in $]0,+\infty[$ ed ha $P(0,1)$ come massimo. Il grafico di $g(x)$ (linea rossa), confrontato con quello di $f(x)$ (linea verde) ha allora l'andamento in figura:



Determiniamo ora una primitiva di $g(x)$:

$\int g(x)dx = \int\frac{2}{e^x+e^{-x}}dx = 2\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = 2arctg(e^x)$, pertanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 2(\lim_{d\to+\infty} arctg\left(e^d\right)-\lim_{c\to-\infty} arctg(e^c)) = 2\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\pi$$

Ciò prova che l'integrale in questione converge a π.