QUESITI:

Verificare che la funzione $f(x) = \sqrt{3x^2+4} - x$, soddisfa le ipotesi di Rolle in $[0;2]$.

La funzione è continua in $\mathbb{R}$ dato che $3x^2+4 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, pertanto è garantita la continuità in $[0;2]$

$$f'(x) = \frac{\cancel{6}^{3}x}{\cancel{2}\sqrt{3x^2+4}} - 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+4}} - 1$$

La funzione è dunque derivabile in $\mathbb{R}$ pertanto la seconda ipotesi è soddisfatta ovvero $f(x)$ è derivabile $\forall x \in]0;2[$.

La 3ª ipotesi prevede che $f(a) = f(b)$ con a e b estremi dell'intervallo di riferimento:

$$f(0) = \sqrt{3 \cdot 0^2 + 4} - 0 \Rightarrow f(0) = 2$$

$$f(2) = \sqrt{3 \cdot 2^2 + 4} - 2 \Rightarrow f(2) = \sqrt{16} - 2 = 2$$

Ne consegue che la funzione soddisfa tutte le ipotesi del Teorema di Rolle.

Pertanto $\exists c \in]0;2[\ / \ f'(c) = 0$

$$f'(c) = \frac{3c}{\sqrt{3c^2+4}} - 1 \quad \text{da cui} \quad \frac{3c}{\sqrt{3c^2+4}} - 1 = 0$$

$3c = \sqrt{3c^2+4}$ dato che $c \in]0;2[$ deve essere

$c > 0 \Rightarrow \quad 9c^2 = 3c^2 + 4 \Rightarrow 6c^2 = 4$ ovvero

$c = \sqrt{\frac{4}{6}} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{2}{3}}$ oppure $c = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Per trovare l'ordinata del punto stazionario

$$f\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) = \sqrt{\cancel{3}\cdot\tfrac{2}{\cancel{3}}+4} - \sqrt{\tfrac{2}{3}} \Rightarrow f\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) = \sqrt{6} - \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

Il punto richiesto ha coordinate $\boxed{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{2}{3}\sqrt{6}\right)}$

Data la funzione integrale $f(x) = \int_1^x t \cdot e^{t^2-1}\,dt$ determina la tangente alla curva nel suo punto di ascissa 1.

$f(x) = \left[F(t) + c\right]_1^x$; si deve individuare la funzione primitiva.

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_1^x 2t \cdot e^{t^2-1}\,dt \Rightarrow f(x) = \left[\frac{1}{2}e^{t^2-1}\right]_1^x$$

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{x^2-1} - \frac{1}{2}e^{1-1} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x^2-1} - 1\right)$$

La tangente in $x_0 = 1$ si ottiene dall'equazione

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

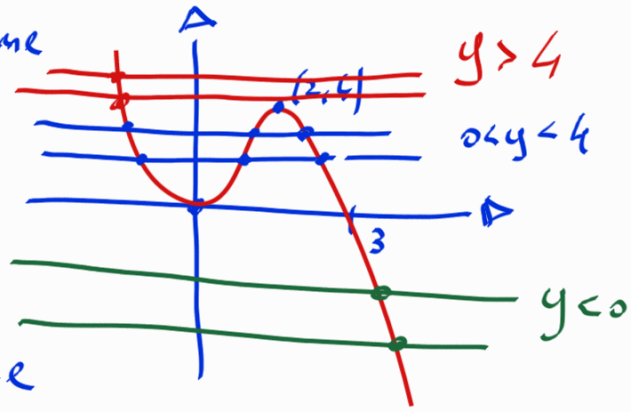
Dato che $f'(x) = x \cdot e^{x^2-1} \Rightarrow f'(1) = 1 \cdot e^0 = 1$

$$f(1) = 1 - 1 \Rightarrow f(1) = 0$$

La tangente in $x_0 = 1$ ha equazione $\boxed{y = x - 1}$

Discuti al variare di h il numero di soluzioni dell'equazione $x^3-3x^2+h-1=0$

Posto $h-1=y$, si ottiene la funzione $y=-x^3+3x^2$
la sua derivata ha equazione $y'=-3x^2+6x$
in $(0,0)$ e in $(2;4)$ la funzione presenta punti stazionari per $y=0$, ovvero $h-1=0$ la funzione presenta 3 zeri di cui uno doppio in $(0,0)$.
Dunque per $y>4 \Rightarrow h-1>4 \Rightarrow \boxed{h>5}$, l'equazione ammette un solo zero reale.
Per $0<y<4$, ovvero $\boxed{1<h<5}$ l'equazione ammette 3 zeri reali e distinti.



Per $y<0 \Rightarrow h<1$ l'equazione ammette un solo zero reale
Per $h=1$ e $h=5$ l'equazione ammette 3 zeri reali di cui uno doppio!

Nell'intervallo $[0;\frac{3}{4}]$ è rappresentato un tratto della curva di equazione $y=-8x^3+6x^2$
BH unisce il minimo e il max della $f(x)$
Si verifichi che l'ulteriore intersezione G di BH con la curva è punto medio di BH e si calcoli l'area tra segmento e curva.

$y'=-24x^2+12x$ da cui $f'(x)\geq 0$

$-24x^2+12x\geq 0 \qquad 24x^2-12x\leq 0$ eq. ass. $\begin{cases} x=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$

$f(0)=0 \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\cancel{8}}{\cancel{8}} + \frac{3}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$B \equiv (0;0) \qquad H \equiv \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

equazione della retta per BH: $y=x$

$$\begin{cases} y = -8x^3+6x^2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 8x^3-6x^2+x=0 \\ x(8x^2-6x+1)=0 \end{array}$$

$x_1 = 0$

$8x^2-6x+1=0 \Rightarrow \frac{\Delta}{4} = 9-8=1 \; ; \; x_{2,3} = \frac{3\pm 1}{8}$

$x_2 = \frac{1}{4} \qquad x_3 = \frac{1}{2}$

Pertanto $G \equiv \left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$ e quindi è punto medio di BH.

$$S = \int_0^{\frac{1}{4}} (x+8x^3-6x^2)\,dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (-8x^3+6x^2-x)\,dx$$

$$S = \left[\frac{1}{2}x^2+2x^4-2x^3\right]_0^{\frac{1}{4}} + \left[-2x^4+2x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}$$

$$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16} + \cancel{2}^{1}\cdot\frac{1}{\cancel{256}\,128} - \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{64}\,32} + \left[\overset{0}{\cancel{-\frac{2\cdot 1}{16}+\frac{2\cdot 1}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}}-(\dots)\right]$$

$$S = \cancel{\frac{1}{32}} + \frac{1}{128} - \cancel{\frac{1}{32}} - \left(-\frac{1}{128}+\cancel{\frac{2}{64}}-\cancel{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}}\right)$$

$$S = \frac{2}{128} \Rightarrow \boxed{S = \frac{1}{64}}$$

Stabilire per quali valori di a e di b si ottiene

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2a-bx}-2}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2a}-2}{0} = \frac{0}{0} \quad \text{f.i.}$$

pertanto deve essere $\sqrt{2a}-2=0$

da cui $2a=4 \Rightarrow \boxed{a=2}$

Inoltre $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2a-bx}-2}{x} \cdot \frac{\sqrt{2a-bx}+2}{\sqrt{2a-bx}+2} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x \to 0} \frac{2a-bx-4}{x(\sqrt{2a-bx}+2)} = \frac{1}{2}$ da cui per $a=2$

si ha $\lim_{x \to 0} \frac{-b\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{4-bx}+2)} = \frac{1}{2}$

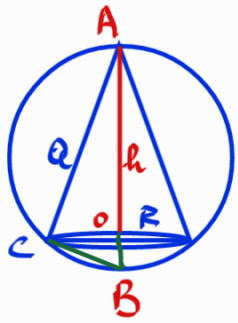
da cui, sostituendo:

$$\frac{-b}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{b}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{b=-2}$$

Determinare l'altezza del cono inscritto in una sfera di raggio r, per il quale la sup. laterale è massima.

$S_\ell = 2\pi R \cdot a$ $\quad$ a apotema

R = raggio del circonf. di base



$AO = 2x$

$AB = 2r$

$CO = R$

2° Teorema di Euclide al triangolo ACB

$$AO : CO = CO : OB$$

$$2x : R = R : (2r - 2x)$$

$$R^2 = 2x(2r-2x) \Rightarrow R = \sqrt{2x(2r-2x)}$$

Pitagora: $AC^2 = AO^2 + CO^2$

$$a^2 = 4x^2 + 2x(2r-2x)$$

$$a^2 = \cancel{4x^2} + 4rx - \cancel{4x^2}$$

$$a = \sqrt{4rx}$$

$$S(x) = 2\pi \sqrt{2x(2r-2x)} \cdot \sqrt{4rx}$$

$$S(x) = 2\pi \sqrt{16r^2x^2 - 16rx^3} \Rightarrow S(x) = 8\pi \sqrt{r^2x^2 - rx^3}$$

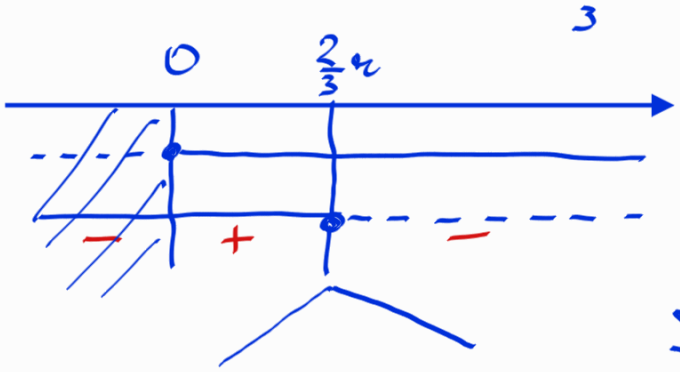
OTTIMIZZAZIONE:

$S'(x) \geq 0 \qquad S'(x) = \dfrac{2r^2x - 3rx^2}{\cancel{2}\sqrt{r^2x^2 - rx^3}} \cdot \overset{4}{\cancel{8}}\pi$

$$2r^2x - 3rx^2 \geq 0 \Rightarrow rx(2r - 3x) \geq 0$$

$$x \geq 0$$

$$3x - 2r \leq 0 \Rightarrow x \leq \frac{2}{3}r$$

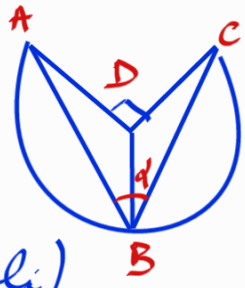


Per $x = \frac{2}{3}r$ la superficie è massima.

Dato che $h = 2x \Rightarrow \boxed{h = \frac{4}{3}r}$

Un'azienda realizza il logo illustrato ....

$\frac{3}{4}$ circonf. di raggio $r = 2$. Si chiede l'area del quadrilatero.



$A\hat{D}C = 90°$

$\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{BD} = 2$ (raggi)

$A\overset{\triangle}{D}B \equiv C\overset{\triangle}{D}B$ (triangoli isosceli)

$C\hat{D}B = 135°$

$S_{ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot DB \cdot \operatorname{sen}(135°) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \operatorname{sen}(45°)$

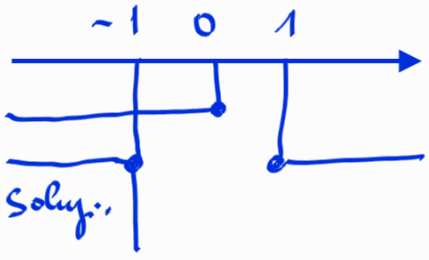
$S_{ABD} = \sqrt{2}$

$S_{ABCD} = 2\, S_{ABD}$

$$\boxed{S_{ABCD} = 2\sqrt{2}}$$

Si determini il campo di esistenza della funzione $f(x) = \sqrt{1 - e^{2x}} \cdot \arcsin\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$$\begin{cases} 1 - e^{2x} \geq 0 \\ -1 \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} e^{2x} \leq 1 \\ \underbrace{x^2 \leq -1}_{\text{mai}} \wedge x^2 \geq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq 0 \\ x \leq -1 \vee x \geq 1 \end{cases}$$



$$\boxed{D_f: \ \forall\, x \leq -1}$$