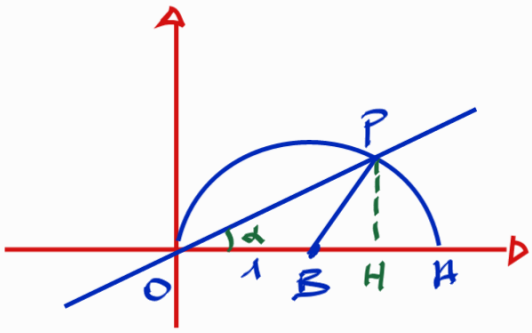
QUESITI SIMULAZIONE 21 APRILE

1°) Data la circonferenza di raggio $r=1$ e la retta t, ------



$m = \operatorname{tg}\alpha$

retta $t: y = mx$

eq. della circonferenza di centro $(\alpha;\beta)$ e raggio r

$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ nel nostro problema $B \equiv (1;0)$; $r=1$

$(x-1)^2 + (y-0)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 - 2x + \cancel{1} + y^2 = \cancel{1}$

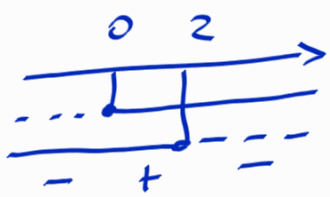
Pertanto la semicirconferenza nel I quadrante ha equazione: $y = \sqrt{2x - x^2}$

Il punto P, necessario per determinare l'altezza del triangolo OPB, si ottiene dal sistema:

$$\begin{cases} y = mx \\ y = \sqrt{2x-x^2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2x-x^2} = mx \quad \text{(equazione irrazionale)}$$

$2x - x^2 \geq 0$ (cond. di esistenza)

$x(2-x) \geq 0 \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$



$0 \leq x \leq 2$

$mx \geq 0$ (cond. di accettab.)

dato che $m > 0 \Rightarrow mx \geq 0$ se $x \geq 0$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ (\cancel{\sqrt{2x-x^2}})^{\cancel{2}} = m^2x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ (m^2+1)x^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

$x \cdot [(m^2+1)x - 2] = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{2}{m^2+1} \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{2}{m^2+1} \\ y = m \cdot \left(\dfrac{2}{m^2+1}\right) \end{cases}$$

$$P \equiv \left(\frac{2}{m^2+1} ; \frac{2m}{m^2+1} \right)$$

Dato che $\overline{PH} = \dfrac{2m}{m^2+1}$ è l'altezza variabile di un triangolo di base costante $\overline{OB} = r = 1$ la superficie $S(m)$ da massimizzare dipende da m, ovvero da α.

$$S(m) = \frac{\overline{OB} \cdot \overline{PH}}{2} \Rightarrow S(m) = 1 \cdot \frac{\cancel{2}m}{1+m^2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}$$

$$S(m) = \frac{m}{1+m^2}$$

OTTIMIZZAZIONE:

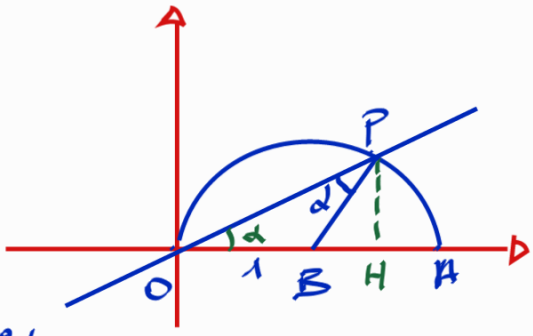
$$S'(m) \geq 0 \Rightarrow \frac{1+m^2 - m(2m)}{(1+m^2)^2} \geq 0 \quad \text{con } m > 0$$

$$\frac{m^2 - 2m^2 + 1}{(1+m^2)^2} \geq 0 \Rightarrow N \geq 0 \; -m^2+1 \geq 0 ; \; m^2 - 1 \leq 0 ; \; -1 \leq m \leq 1$$

$D > 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}$

$m = 1 \Rightarrow tg\,\alpha = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = 45°}$

SECONDO METODO



$\widehat{OBP} = \pi - 2\alpha$

Pertanto l'angolo alla circonferenza che insiste sulla corda $\overline{OP}$ è $\beta = \dfrac{\pi - 2\alpha}{2}$

Teorema della corda applicato ad $\overline{OP}$:

$\overline{OB} = 2r \cdot \operatorname{sen}\beta \Rightarrow \overline{OP} = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$\overline{OP} = 2 \cdot \cos\alpha$

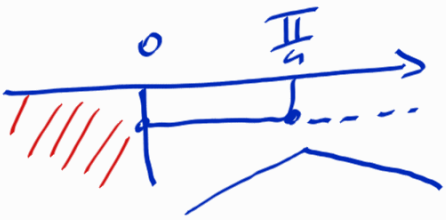
$S_{OPB} = \dfrac{\overline{OP} \cdot \overline{OB} \cdot \operatorname{sen}\alpha}{2} \Rightarrow S_{OPB} = \dfrac{2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{2}$

OTTIMIZZAZIONE:

$S_{OPB} = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\alpha) \Rightarrow S'(\alpha) = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} \cos(2\alpha)$

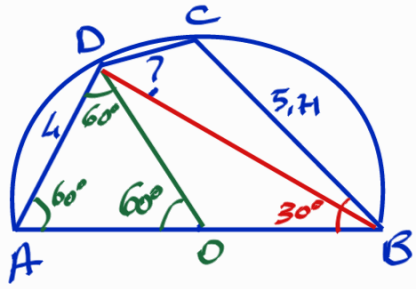
$\cos 2\alpha \geq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq 2\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ dato che

$\alpha \geq 0 \Rightarrow 0 \leq 2\alpha \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$



per $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{4}}$ l'area è max.

2°) Sapendo che l'angolo $\alpha = 44{,}48°$, determinare il perimetro ----



Dato che $AD = 4$, ovvero è pari al raggio della circonf. rappresenta un lato dell'esagono regolare inscritto.

Il triangolo ADO è costituito da 3 lati uguali e 3 angoli da 60°, ovvero è un triangolo equilatero. Dunque l'angolo $A\hat{B}D$, angolo alla circonferenza che insiste su $\overline{AD}$ è la metà di 60° e divide α in due parti $\alpha_1 = 30°$ e $\alpha_2 = 14{,}48°$.

Applicando il teorema della corda a $\overline{DC}$, si ottiene che: $\overline{DC} = 2r \cdot \operatorname{sen} \alpha_2$

$\overline{DC} = 8 \cdot \operatorname{sen}(14{,}48°) \Rightarrow \overline{DC} \simeq 2$

Pertanto il perimetro del quadrilatero è $2p = 2 + 4 + 8 + 5{,}71 \Rightarrow \boxed{2p = 19{,}71}$

AREA ABCD:

Il triangolo ABD è retto in $\widehat{ADB}$, pertanto DB è un suo cateto ed è altezza del triangolo equilatero di lato $AB = 8$.

Dato che la misura dell'altezza è $\frac{l}{2}\sqrt{3}$ allora $DB = \frac{AB}{2}\sqrt{3} \Rightarrow \overline{DB} = 4\sqrt{3}$.

Calcoliamo l'area del quadrilatero come somma delle aree dei due triangoli ADB e DBC.

$S_{ADB} = \frac{1}{2}\overline{DB} \cdot \overline{AB} \cdot \operatorname{sen}(30°) \Rightarrow S_{ADB} = \frac{4\sqrt{3}}{2} \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}$

$S_{ADB} = 8\sqrt{3}$

$S_{DBC} = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot DB \cdot \operatorname{sen}(14{,}48°)$

$S_{DBC} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 5{,}71 \cdot \overset{2}{\cancel{4}}\sqrt{3} \cdot \operatorname{sen}(14{,}48°) \Rightarrow S_{DBC} \simeq 4{,}9$

$S_T = S_{DBC} + S_{ADB} = 8\sqrt{3} + 2{,}86\sqrt{3} \cong \boxed{11\sqrt{3}}$

3) Stabilire per quali valori di a la funzione

$f(x) = \left(4^{(a-1)\cdot x^2 - x}\right)^{\frac{1}{ax^2-2}}$, ammette asintoto orizzontale di equazione $y = 2$. ....

Dato che $y=2$ è un asintoto orizzontale per la funzione, si ha

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} 4^{\frac{(a-1)x^2-x}{ax^2-2}} = 2$$

da cui:

$$4^{\lim_{x\to\infty}\frac{(a-1)x^2-x}{ax^2-2}} = 2 \Rightarrow 4^{\frac{a-1}{a}} = 2$$

in quanto la frazione algebrica presenta infiniti dello stesso ordine.

$$2^{\frac{2(a-1)}{a}} = 2^1 \Rightarrow \frac{2a-2}{a} = 1 \quad a\neq 0$$

$$2a-2=a \Rightarrow 2a-a=2 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

Pertanto la funzione richiesta è

$$f(x) = 4^{\frac{x^2-x}{2x^2-2}}$$

Dominio di $f(x)$: $\quad 2x^2-2\neq 0$

$x^2-1\neq 0 \Rightarrow x\neq \pm 1$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to -1^-} 4^{\frac{x^2-x}{2x^2-2}} &= 4^{\frac{2}{0^+}} = 4^{+\infty} = \infty \\ \lim_{x\to -1^+} 4^{\frac{x^2-x}{2x^2-2}} &= 4^{\frac{2}{0^-}} = 4^{-\infty} = 0\end{aligned}\right\} \begin{array}{l} x=-1 \\ \text{asintoto} \\ \text{verticale} \\ \text{sinistro!}\end{array}$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 1} 4^{\frac{x^2-x}{2x^2-2}} &= 4^{\frac{0}{0}} \quad \text{f.i.} \\ \lim_{x\to 1} 4^{\frac{x\cancel{(x-1)}}{2(x+1)\cancel{(x-1)}}} &= \lim_{x\to 1} 4^{\frac{x}{2(x+1)}} = \sqrt{2}\end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{discont.} \\ \text{eliminabile}\end{array}$$

4) Determina il punto di non derivabilità della seguente funzione: $y=\sqrt[3]{x\sqrt{x^2+1}}$

Dominio della funzione: $x^2+1\geq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

$$y' = \overbrace{\left[\sqrt{x^2+1} + x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right]}^{\text{DERIVATA DEL PRODOTTO}} \cdot \overbrace{\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(x\sqrt{x^2+1}\right)^2}}}^{\text{DERIVATA DELLA RADICE CUBICA}}$$

$$y' = \frac{2(x^2+1)+2x^2}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2(x^2+1)}}$$

$$y' = \frac{2x^2+1}{3\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt[3]{x^2(x^2+1)}}$$

La funzione derivata è definita in tutto $\mathbb{R}$ escluso $x_0=0$, che quindi rappresenta un punto di non derivabilità per la funzione.

5) Data la funzione $f(x)=9-\frac{1}{2}\cdot(x-2)^4$, verifica se in $[0,4]$ sono soddisfatte le ipotesi di Rolle e -----

La funzione è alg. razionale intera definita e continua in tutto $\mathbb{R}$.

La derivabilità in $(0;4)$ è soddisfatta in quanto: $f'(x) = -2(x-2)^3$ è, a sua volta definita e continua in $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 9 - \frac{1}{2}(0-2)^4 \Rightarrow f(0) = 1 \\ f(4) = 9 - \frac{1}{2}(4-2)^4 \Rightarrow f(4) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{f(0) = f(4)}$$

Pertanto sono soddisfatte tutte le ipotesi del teorema di Rolle.

Bisogna concludere che esiste almeno un punto $x_0 \in (0,4)$ tale che $f'(x_0) = 0$

$$f'(x_0) = -2(x_0-2)^3 \Rightarrow -2(x_0-2)^3 = 0 \Rightarrow \boxed{x_0 = 2}$$

$x_0 = 2$ è l'unico punto nell'intervallo $(0,4)$ in cui la derivata prima si annulla!

6) Gilberto riesce a scomporre il polinomio $P(x) = x^3 - 3x + 2$ in 5 modi diversi....

Salve, sono Gilberto!

Io ho scomposto così:

RUFFINI

$$P(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 2 \Rightarrow P(-2) = 0$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & & -2 & +4 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x+2)(x^2 - 2x + 1)$$

$$P(x) = (x+2)(x-1)^2$$

2° METODO:

$$P(x) = x^3 \underbrace{- x - 2x}_{-3x} + 2$$

$$P(x) = x(x^2-1) - 2(x-1)$$

$$P(x) = x(x+1)(x-1) - 2(x-1)$$

$$P(x) = (x-1)[x(x+1) - 2]$$

$$P(x) = (x-1)(x^2+x-2)$$

$$P(x) = (x-1)^2(x+2)$$

4° METODO:

$$P(x) = x^3 - 3x + 2$$

$$P(x) = x^3 \underbrace{- 4x + x}_{-3x} + 2$$

$$P(x) = x(x^2-4) + (x+2)$$

$$P(x) = x(x+2)(x-2) + (x+2)$$

$$P(x) = (x+2)\cdot[x(x-2)+1]$$

$$P(x) = (x+2)(x-1)^2$$

3° METODO

$$P(x) = x^3 \underbrace{- x^2 + x^2}_{0} - 3x + 2$$

$$P(x) = x^2(x-1) + \underbrace{x^2 - 3x + 2}_{(x-1)(x+2)}$$

$$P(x) = (x-1)(x^2+x-2)$$

$$P(x) = (x-1)^2(x+2)$$

5° METODO:

POSTO $2 = 3-1$

$$P(x) = x^3 - 3x + 3 - 1$$

$$P(x) = \underbrace{x^3 - 1}_{\text{diff. di cubi}} - 3(x-1)$$

$$P(x) = (x-1)(x^2+x+1) - 3(x-1)$$

$$P(x) = (x-1)\cdot(x^2+x+1-3)$$

$$P(x) = (x-1)(x^2+x-2)$$

$$P(x) = (x-1)^2(x+2);$$

Soluzioni da Gilberto!

7) Data la funzione $f(x) = \log_a[(x^2-a)^{-2}]$ stabilisci se:

a) $f(x)$ è funzione pari

$f(x)$ è pari se risulta $f(x) = f(-x)$ e la funzione presenta una simmetria rispetto all'asse y.

$f(-x) = \log_a\left[\left((-x)^2 - a\right)^{-2}\right]$ che conferma l'uguaglianza.

b) è discontinua per $x = \sqrt{a}$

La funzione è esprimibile anche nella forma $f(x) = \log_a\left[\frac{1}{(x^2-a)^2}\right]$ pertanto si presenta con argomento positivo $\forall x$ tale che

$x^2 - a \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{a}$

In tali valori la funzione presenta due discontinuità di seconda specie.

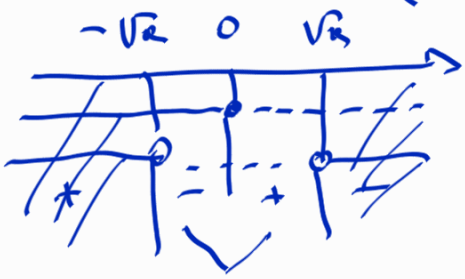
c) ha un minimo in $(0; -2)$ per valori di $a > 1$

La famiglia di funzioni ha per derivata

$$f'(x) = -\frac{4x\cancel{(x^2-a)}}{(x^2-a)^{\cancel{4}3}} \cdot \ln a$$

$$f'(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{-4x}{(x^2-a)^3} \geq 0 \quad N \geq 0 \quad 4x \leq 0 \quad x \leq 0$$

$$D > 0 \quad x \leq -\sqrt{a} \cup x \geq \sqrt{a}$$



$x = 0$ punto di minimo