PROBLEMA 2 - SIMULAZIONE 21 APRILE

Sia $f(x)$ una famiglia di funzioni trascendenti espressa dall'equazione

$$f(x) = (x^2+a)\cdot e^{bx} \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}$$

1) Data la parabola di equazione $g(x) = x^2+2x-3$ determina il valore dei due parametri ----

Gli zeri di $g(x)$ si ottengono ponendo $g(x)=0$

$$x^2+2x-3=0 \Rightarrow (x+3)(x-1)=0 \begin{cases} x_1=-3 \\ x_2=1 \end{cases}$$

I valori dei parametri si ricavano partendo dalla condizione che $x_1=-3$ e $x_2=1$ sono punti stazionari per la funzione $f(x)$.

Quindi deve essere

$$f'(-3)=0 \quad e \quad f'(1)=0$$

Deriviamo la funzione parametrica

$$f'(x) = (2x)\cdot e^{bx} + b(x^2+a)e^{bx}$$

$$f'(x) = e^{bx}(2x+bx^2+ab)$$

$$f'(-3) = e^{-3b}\cdot(-6+9b+ab) \Rightarrow 9b+ab=6$$

$$f'(1) = e^{b}(2+b+ab) \Rightarrow ab+b=-2$$

Poste a sistema le due condizioni, si ha

$$\begin{cases} b(9+a)=6 \\ b(a+1)=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=\dfrac{6}{9+a} \\ \dfrac{6}{9+a}\cdot(a+1)=-2 \end{cases}$$

$$6a+6=-18-2a \Rightarrow 6a+2a=-18-6$$

$$8a=-24 \Rightarrow a=-3$$

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = \dfrac{6}{9-3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \end{cases}$$

La funzione cercata ha equazione

$$\boxed{f(x) = (x^2-3)e^x}$$

2) ... Studia la funzione così ottenuta.

D_f: $\forall x \in \mathbb{R}$ in quanto prodotto di funzioni continue

SIMMETRIE:

$f(-x) = ((-x)^2-3)\cdot e^{-x} \Rightarrow f(-x) = (x^2-3)e^{-x}$

$f(-x) \neq f(x)$, la funzione non è pari

$-f(x) = (-x^2+3)e^x \Rightarrow -f(x) \neq f(-x)$

La funzione non è dispari

$f(x)$ non è simmetrica rispetto all'asse y e non è simmetrica rispetto all'origine $(0;0)$.

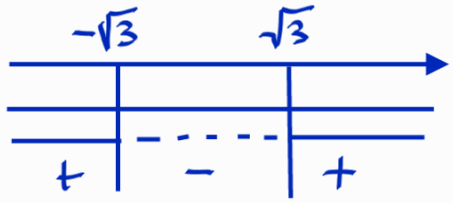
INTERSEZIONE CON GLI ASSI:

$$\cap x \begin{cases} y = 0 \\ f(x) = (x^2-3)e^x \end{cases} \Rightarrow x^2-3=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\cap y \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = (x^2-3)e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ f(0) = -3\cdot e^0 \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases}$$

SEGNO DELLA FUNZIONE:

$$f(x) > 0 \Rightarrow (x^2-3)e^x > 0 \begin{cases} e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ x^2-3>0 \quad x<-\sqrt{3} \vee x>\sqrt{3} \end{cases}$$



COMPORTAMENTO AGLI ESTREMI:

$$\lim_{x\to-\infty} (x^2-3)\cdot e^x = \infty \cdot e^{-\infty} = \frac{\infty}{e^{\infty}}$$

oppure:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2-3)}{e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty} \quad f.i.$$

Considerando l'ordine degli infiniti, sappiamo che tende più rapidamente all'infinito la forma esponenziale, quindi il limite è zero.

De l'Hopital

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \frac{\infty}{-\infty} \quad f.i.$$

ancora De l'Hopital

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \frac{2}{\infty} = 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2-3)e^x = \infty \cdot \infty = \infty$$

Quindi $y=0$ è un asintoto orizzontale a sinistra per la $f(x)$.

MONOTONIA:

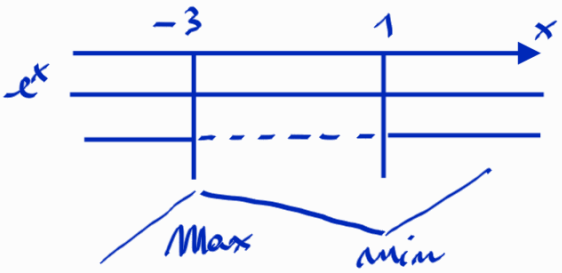
$$f'(x) = 2xe^x + (x^2-3)e^x \qquad f'(x) = e^x(x^2+2x-3)$$

$f'(x) = e^x \cdot g(x)$ pertanto la derivata si annulla nei punti in cui la parabola $g(x)$ incontra l'asse delle ascisse.

$f'(x) \geq 0$ (MONOTONIA)

$e^x(x^2+2x-3) \geq 0 \qquad e^x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

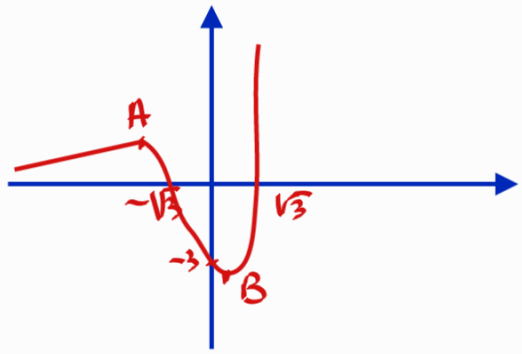
$x^2+2x-3 \geq 0 \Rightarrow \quad x \leq -3 \vee x \geq 1$



La funzione presenta un max nel punto $x_1 = -3$ e un min nel punto $x_2 = 1$

$f(-3) = (9-3)e^{-3} = \frac{6}{e^3}$ $\qquad A \equiv \left(-3; \frac{6}{e^3}\right)$

$f(1) = (1-3)e = -2e$ $\qquad B \equiv (1; -2e)$



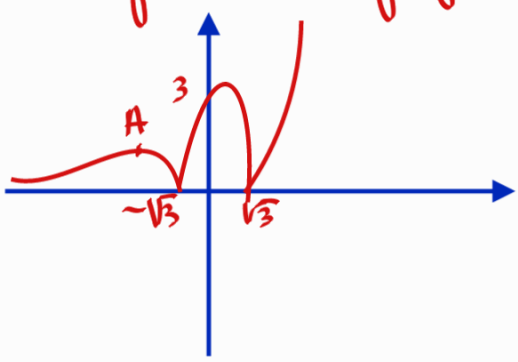
3) Verifica che è soddisfatta la relazione $f(0) = g(0)$

$f(0) = (0^2-3)e^0 \Rightarrow f(0) = -3$

$g(0) = 0^2+2(0)-3 \Rightarrow g(0) = -3$

La relazione di uguaglianza è soddisfatta!

4) Disegna il grafico di $|f(x)|$ ----



Dalla rappresentazione si evince la presenza di due punti angolosi.

Dato che la funzione in modulo corrisponde alla funzione a tratti

$$h(x) = \begin{cases} (x^2-3)\,e^x & \text{per } x < -\sqrt{3} \vee x \geq \sqrt{3} \\ (3-x^2)\cdot e^x & \text{per } -\sqrt{3} \leq x < \sqrt{3} \end{cases}$$

da cui

$$h'(x) = \begin{cases} 2x\cdot e^x + (x^2-3)e^x & \text{per } x < -\sqrt{3} \vee x \geq \sqrt{3} \\ -2x\,e^x + (3-x^2)e^x & \text{per } -\sqrt{3} \leq x < \sqrt{3} \end{cases}$$

$$h'_-(-\sqrt{3}) = -2\sqrt{3}\,e^{-\sqrt{3}} + (3-3)e^{-\sqrt{3}} \Rightarrow h'_-(-\sqrt{3}) = -\frac{2\sqrt{3}}{e^{\sqrt{3}}}$$

$$h'_+(-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}\,e^{-\sqrt{3}} + (3-3)e^{-\sqrt{3}} \Rightarrow h'_+(-\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{e^{\sqrt{3}}}$$

$h'_-(-\sqrt{3}) \neq h'_+(-\sqrt{3})$ ovvero derivata sinistra e destra finite ma diverse tra loro $\Rightarrow x = -\sqrt{3}$ punto angoloso

Analogo procedimento vale per $x = \sqrt{3}$.

Riprendi la funzione $f(x)$ e pori $a=0$ e $b=1$...

5) Verifica che i grafici $|f(x)|$ ed $f(x)$ sono sovrapponibili

Dato che con i nuovi valori assegnati ai parametri la funzione $f(x) = x^2 \cdot e^x$ è composta da due fattori positivi, ci porta a concludere che il suo grafico si sviluppa tutto al di sopra

dell'asse x, pertanto coincide con la stessa funzione in modulo.

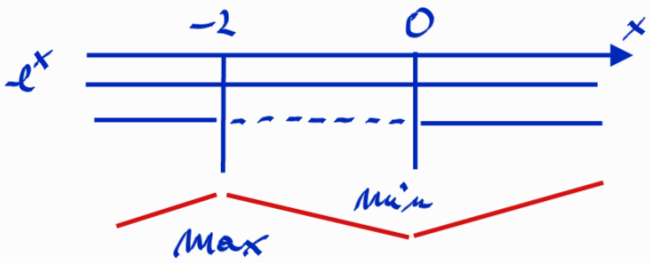
6) La funzione presenta un minimo in (0,0) e un massimo ....

$f(x) = x^2 \cdot e^x \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$

$f'(x) \geq 0 \Rightarrow (2x + x^2)e^x \geq 0$ da cui

$e^x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$2x + x^2 \geq 0 \qquad x \leq -2 \vee x \geq 0$



La funzione presenta un massimo in $x_1 = -2$

$f(-2) = 4e^{-2} \Rightarrow f(-2) = \frac{4}{e^2}$

Mentre il minimo in $x_2 = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \cdot e^0$

$O \equiv (0,0)$ minimo e $B \equiv \left(-2; \frac{4}{e^2}\right)$ massimo

7) Trovata la retta per OB, verificare che sussistono le condizioni affinché in un punto $x_0 \in]-2, 0[$ la tang. alla curva risulti // ad OB.

La retta per OB è del tipo $y = mx$, dove

$m = \frac{\frac{4}{e^2}}{-2} \Rightarrow m = -\frac{1}{\cancel{2}_1} \cdot \frac{\cancel{4}^2}{e^2} \qquad m = -\frac{2}{e^2}$

La retta ha dunque equazione $\boxed{y = -\frac{2}{e^2}x}$

Dato che la funzione $f(x)$ è continua in $\mathbb{R}$ e la sua derivata $f'(x) = e^x(2x + x^2)$ è definita e continua in $\mathbb{R}$, ne consegue che la $f(x)$ è continua e derivabile

in $[-2;0]$ pertanto sussistono le ipotesi del teorema di Lagrange.

Il teorema afferma che data la funzione $y=f(x)$, se essa risulta continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ e derivabile al più in (a,b), allora esiste un punto $c \in (a,b)$ per cui è soddisfatta la relazione:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Contestualizzando: $\exists$ almeno un valore $c \in]-2;0[$ per cui si ha

$$f'(c) = \frac{f(-2)-f(0)}{-2-0} \Rightarrow f'(c) = \frac{\frac{4}{e^2}-0}{-2}$$

ovvero

$$f'(c) = \frac{4}{e^2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f'(c) = -\frac{2}{e^2}$$

Ricordando il significato geometrico della derivata in un punto, possiamo asserire che nel punto "c" la retta tangente alla curva deve avere come coefficiente angolare $-\frac{2}{e^2}$, quindi, tale tangente, risulterebbe parallela alla secante per OB.