

PROBLEMA 1

Dato la funzione parametrica di parametro t

$$f(x) = \frac{4t}{tx^2 + 1} \quad \dots \dots$$

Dato che $f(x)$ deve essere continua in \mathbb{R} , cioè composta che $t > 0$. Suffatti:

1) se $t=0$ la funzione diventa:

$$f(x) = \frac{0}{1} \Rightarrow y=0, \text{ equazione dell'asse delle ascisse.}$$

2) Se $t < 0 \Rightarrow tx^2 + 1$ ammette radici reali che rendono nullo il denominatore. Per tali valori delle x , la funzione presenta delle discontinuità!

1) Verifica che per $t \geq \frac{1}{2}$ la retta intersecca \dots

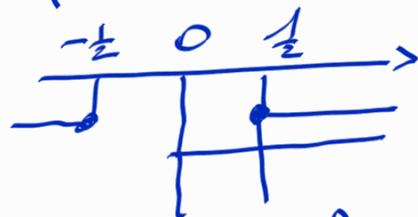
$$\begin{cases} y = \frac{1}{t} \\ y = \frac{4t}{tx^2 + 1} \end{cases} \quad \frac{4t}{tx^2 + 1} = \frac{1}{t} \Rightarrow 4t^2 = tx^2 + 1$$

$$tx^2 = 4t^2 - 1 \Rightarrow x^2 = \frac{4t^2 - 1}{t} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{4t^2 - 1}{t}}$$

Sapendo che $t > 0$ possiamo concludere che l'intersezione esiste se $\begin{cases} 4t^2 - 1 \geq 0 \\ t > 0 \end{cases}$

$$\text{dato che } 4t^2 - 1 \geq 0$$

$$\text{per } t \leq -\frac{1}{2} \vee t \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$$



Dunque la retta incontra la funzione per $t \geq \frac{1}{2}$.

2) Detti P e P' i punti in cui il grafico ...

L'area del rettangolo si ottiene moltiplicando l'altezza $PQ = \frac{1}{t}$, per la base, che si ottiene calcolando la distanza $\overline{PP'} = |x_{P'} - x_P|$. Abbiamo già calcolato le ascisse di P e P' in funzione di t : $x_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{4t^2-1}{t}}$

Pertanto la funzione area da massimizzare è:

$$A(t) = \left(\sqrt{\frac{4t^2-1}{t}} + \sqrt{\frac{4t^2-1}{t}} \right) \cdot \frac{1}{t} \Rightarrow A(t) = 2 \sqrt{\frac{4t^2-1}{t}} \cdot \frac{1}{t}$$

$$A(t) = 2 \sqrt{\frac{4t^2-1}{t^3}} \quad \text{OTTIMIZZIAMO L'AREA!!}$$

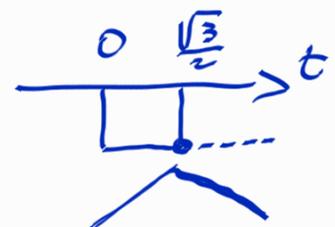
$$A'(t) = \cancel{2} \cdot \left[\frac{8t(t^3) - (4t^2-1) \cdot 3t^2}{t^6} \right] \cdot \frac{1}{\cancel{2} \sqrt{\frac{4t^2-1}{t^3}}}$$

$$A'(t) = \frac{8t^4 - 12t^4 + 3t^2}{t^6} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{4t^2-1}{t^3}}}$$

$$A'(t) \geq 0 \quad \frac{-4t^4 + 3t^2}{t^6} \cdot \sqrt{\frac{t^3}{4t^2-1}} \geq 0 \quad \text{ovvero}$$

$$\frac{-4t^2 + 3}{t^4} \geq 0 \Rightarrow -4t^2 + 3 \geq 0 \quad \text{da cui}$$

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ t > 0 \quad (\text{cond. preliminare}) \end{cases}$$



Pertanto l'area del rettangolo è massima per $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Quindi $f(x) = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} x^2 + 1}$

3) Appurato che l'area del rettangolo è massima per $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, studiare $f(x) \dots$

$$f(x) = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}x^2 + 2}$$

funzione algebrica razionale fratta di 3° grado
definita $\forall x \in \mathbb{R}$

La funzione è sempre positiva in tutto \mathbb{R}
perciò incontrerà soltanto l'asse delle y .

$$\cap y \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}x^2 + 2} \Rightarrow f(0) = \frac{4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow f(0) = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$A \equiv (0; 2\sqrt{3});$$

SIMMETRIE:

Dato che $f(x) = f(-x)$ la funzione è
simmetrica rispetto all'asse delle ordinate.

COMPORIAMENTO AGLI ESTREMI:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}x^2 + 2} = \frac{4\sqrt{3}}{\infty} = 0$$

$y=0$ è asintoto orizzontale sia sinistra che
destra (data la simmetria di $f(x)$)

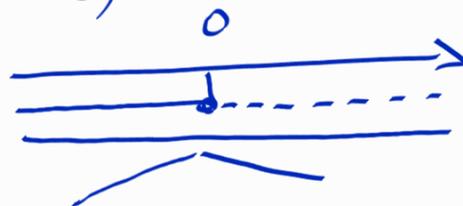
MONOTONIA:

$$f'(x) \geq 0 \Rightarrow f'(x) = -\frac{4\sqrt{3}(2\sqrt{3}x)}{(\sqrt{3}x^2 + 2)^2}$$

$N \geq 0$

$$-24x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$$

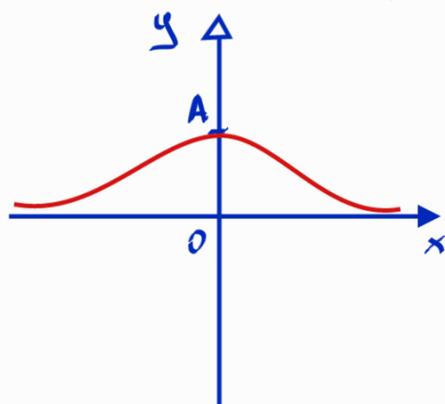
$$D > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



La funzione presenta un massimo nel punto di ascisse $x=0$. L'ordinata è già nota pertanto la funzione ha un max in $A \equiv (0; 2\sqrt{3})$.

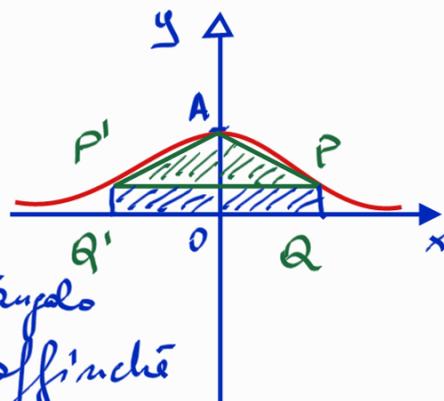
Dato il comportamento simmetrico e la continuità in \mathbb{R} , non si ritiene indispensabile l'intervento della derivata seconda.

GRAFICO DI $f(x)$:



4) Detto A il massimo sulla curva di $f(x)$

Il rapporto $\frac{S_{PP'QQ'}}{S_{PAP'}}$ = 1



Dato che il triangolo e il rettangolo hanno la base in comune, affinché il rapporto risulti pari a 1 deve essere l'altezza del triangolo doppio di quella del rettangolo. L'altezza del rettangolo

$$PQ = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \overline{PQ} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \overline{PQ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Detta h l'altezza del triangolo, essa si ottiene come differenza tra l'ordinata di A e l'ordinata di P .

$$h = 2\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow h = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

Da ciò si deduce che: $S_{PQA'P} = PP' \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3}$

$$S_{PAP'} = PP' \cdot \frac{4}{3}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow S_{PAP'} = PP' \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

Quindi:

$$\frac{S_{PQA'P}}{S_{PAP'}} = \frac{PP' \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3}}{PP' \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3}} = 1;$$

5) Verificare mediante calcolo la -----

$$f(-1) = f(1) = 8\sqrt{3} - 12$$

$$f(-1) = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2} \Rightarrow f(-1) = \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}$$

$$f(-1) = \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)}{-1} \Rightarrow f(-1) = 8\sqrt{3} - 12$$

$$f(1) = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2} \dots \dots f(1) = 8\sqrt{3} - 12$$

6) Grazie anche alla relazione del punto precedente verificare che -----

$f(x)$ è continua in \mathbb{R} pertanto lo è in $[-1; 1]$; $f(x)$ è derivabile in \mathbb{R} in quanto

la sua derivata:

$$f'(x) = \frac{-24x}{(\sqrt{3}x^2+2)^2} \text{ è continua in } \mathbb{R}, \text{ pertanto}$$

non sono presenti punti di non derivabilità.

Pertanto $\exists c \in (-1; 1) : f'(c) = 0!$

Tale asserito rappresenta la tesi del Teorema di ROLLÉ.

