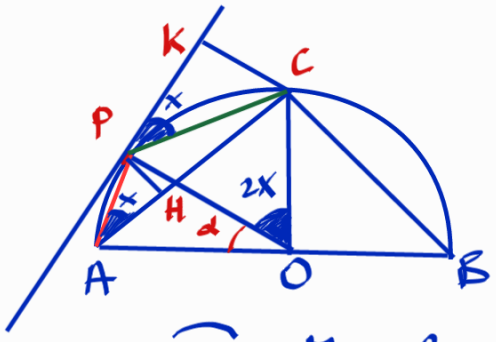
179 In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, la corda AC misura $r\sqrt{2}$. Il punto P, preso sull'arco $\widehat{AC}$, ha proiezione H sul segmento AC e C ha proiezione K sulla tangente in P. Detto x l'angolo $C\widehat{A}P$, determina la funzione $y = \overline{CK} + \sqrt{2}\,\overline{PH} + \overline{PK}$ e rappresenta il suo grafico tenendo conto dei limiti del problema.

$\left[y = 2r\sin 2x;\ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}\right]$

funzione da costruire:

$y = \overline{CK} + \sqrt{2}\cdot\overline{PH} + \overline{PK}$



Gli angoli $P\hat{A}C = K\hat{P}C = x$ sono angoli alla circonf. che insistono sullo stesso arco $\widehat{PC}$. Inoltre $P\hat{O}C = 2x$ in quanto è l'angolo al centro che insiste su PC. Dato che $\overline{AC} = r\sqrt{2}$ deve essere il lato di un quadrato inscritto nella circonferenza; dunque $A\hat{O}C = \frac{\pi}{2}$ mentre $A\hat{O}P = \alpha = \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$.

Due dimensioni che concorrono a definire la funzione sono CK e PK, esse sono cateti del triangolo rettangolo PKC. Pertanto si ha:

$$\overline{CK} = \overline{PC}\cdot \operatorname{sen} x \qquad \overline{PK} = \overline{PC}\cdot\cos x$$

dove PC è una corda della circonf.

$PC = 2r\cdot\operatorname{sen} x$ sostituendo si ha

$$\overline{CK} = 2r\cdot\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{sen} x \qquad \overline{PK} = 2r\cdot\operatorname{sen} x\cdot\cos x$$

$$\overline{CK} = 2r\operatorname{sen}^2 x\ ; \qquad \overline{PK} = 2r\operatorname{sen} x\cdot\cos x\ ;$$

La corda $\overline{AP}$ è ipotenusa del triangolo APH, consente di ricavare PH con il teorema del triangolo rettangolo: $\overline{PH} = \overline{AP}\cdot\operatorname{sen} x$

Ricaviamo $\overline{AP}$ come corda:

$$\overline{AP} = 2r\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow \overline{AP} = 2r\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

Quindi: $PH = \Big(\underbrace{2r \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}_{\overline{AP}}\Big) \cdot \operatorname{sen} x$

Pertanto la nostra funzione:

$$y = \overline{CK} + \sqrt{2} \cdot \overline{PH} + \overline{PK}$$

diventa:

$$y = \overbrace{2r \operatorname{sen}^2 x}^{CK} + \sqrt{2} \overbrace{\left[2r \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] \operatorname{sen} x}^{\overline{PH}} + \overbrace{2r \operatorname{sen} x \cdot \cos x}^{\overline{PK}}$$

$$y = 2r \operatorname{sen}^2 x + \sqrt{2} \cdot 2r \cdot \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \cos x - \operatorname{sen} x \cdot \cos\frac{\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{sen} x + 2r \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x$$

$$y = 2r \cdot \operatorname{sen}^2 x + 2r\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} x\right) \cdot \operatorname{sen} x + 2r \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x$$

$$y = 2r \operatorname{sen}^2 x + 2r(\cos x - \operatorname{sen} x) \cdot \operatorname{sen} x + 2r \operatorname{sen} x \cdot \cos x$$

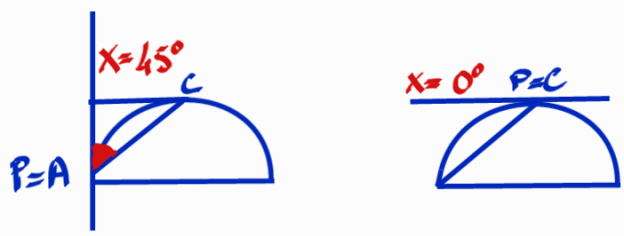
$$y = \cancel{2r \operatorname{sen}^2 x} + 2r \operatorname{sen} x \cos x - \cancel{2r \operatorname{sen}^2 x} + 2r \operatorname{sen} x \cdot \cos x$$

$y = 4r \operatorname{sen} x \cdot \cos x$ da cui $y = 2r \operatorname{sen}(2x)$

L'angolo x dipende dalla posizione occupata da P lungo l'arco $\overset{\frown}{AC}$:

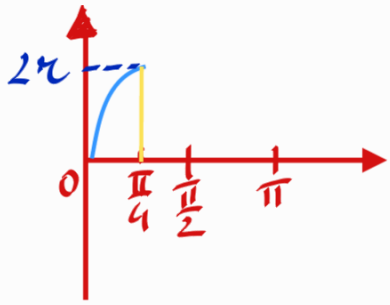
Dato che x deve essere compreso tra 0 e $45°$

CASI LIMITE:



$y = 2r \operatorname{sen}(2x)$

avrà come posizioni limite:



$f(0) = 2r \cdot \operatorname{sen}(0) \Rightarrow f(0) = 0$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2r \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2r$