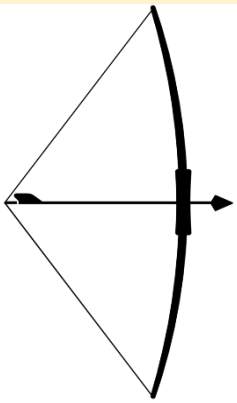
NOME: _____

Verifica di Matematica – equazioni e disequazioni goniometriche

Problema numero 1 – PUNTI 3 GB 2021

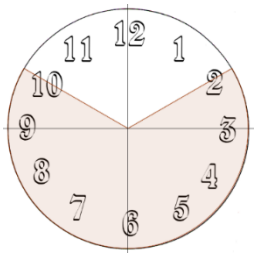


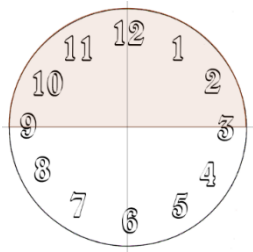
Non sappiamo quando e come fu inventato l'arco, ma fin dalla preistoria rappresentazioni grafiche rupestri ne documentano l'uso.

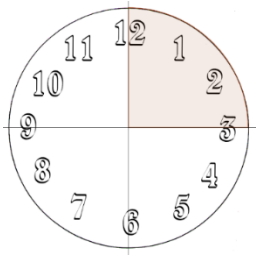
Nel corso della sua storia, questo straordinario strumento, ha subìto costanti miglioramenti rivelandosi fondamentale negli eventi che hanno determinato il percorso dell'umanità.

Un arciere Romano volle sperimentare l'uso di un arco che aveva progettato un dotto alchimista del suo tempo. L'arco, rettificato, aveva la stessa misura delle frecce che scoccava e il dotto fornì la misura di arco e frecce al soldato Romano dicendo che entrambe le misure scaturivano dalla disequazione $1 - 2\cos^2 x \geq 0$. Attualizzando e riportando in metri i risultati scaturiti dalla circonferenza goniometrica, qual è la misura di arco e frecce.

Problema numero 2 – PUNTI 5 GB 2021







Aldo, Giovanni e Giacomo tifano per tre diverse squadre di serie A. Seguono da tempo la loro squadra del cuore e spesso si confrontano sulle prestazioni offerte dalle formazioni di cui sono sostenitori. Ogni tifoso è convinto che la squadra per cui parteggia sia la più offensiva. Un giorno ingaggiano una singolare scommessa. I tre amici, nel corso di una giornata di campionato in cui le tre squadre incontrano tre avversarie di pari livello, registrano gli eventi e cronometrano, con un comune orologio analogico, le azioni più lunghe nell'area avversaria. Sono riportati in rosso i tempi, espressi in secondi, forniti dalle tre squadre.

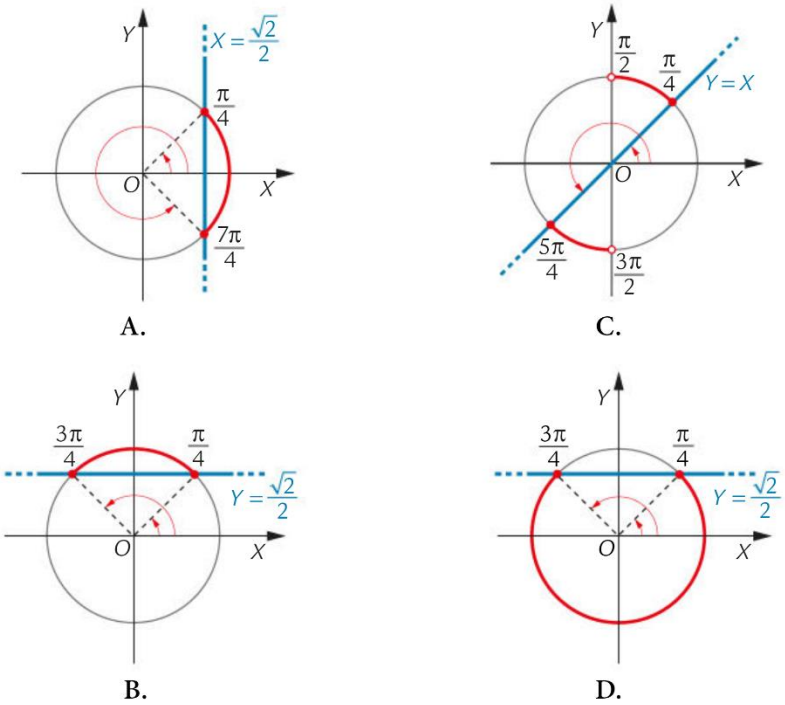
1. Riporta su una circonferenza goniometrica i settori circolari e scrivi le disequazioni compatibili con gli intervalli rappresentati
2. Scrivi l'ampiezza di ogni angolo descritto dalla lancetta dei secondi
3. Scrivi e risolvi il sistema rappresentato dalle tre disequazioni
4. Descrivi la relazione che intercorre tra i secondi trascorsi nelle tre rilevazioni e le rispettive ampiezze angolari
5. Stabilisci e giustifica se il sistema $\begin{cases} senx \geq 0 \\ cosx \geq 0 \end{cases}$, può avere soluzioni descritte da una delle rappresentazioni in figura.

NOME:

_____

Problema numero 3 – PUNTI 3 GB 2021

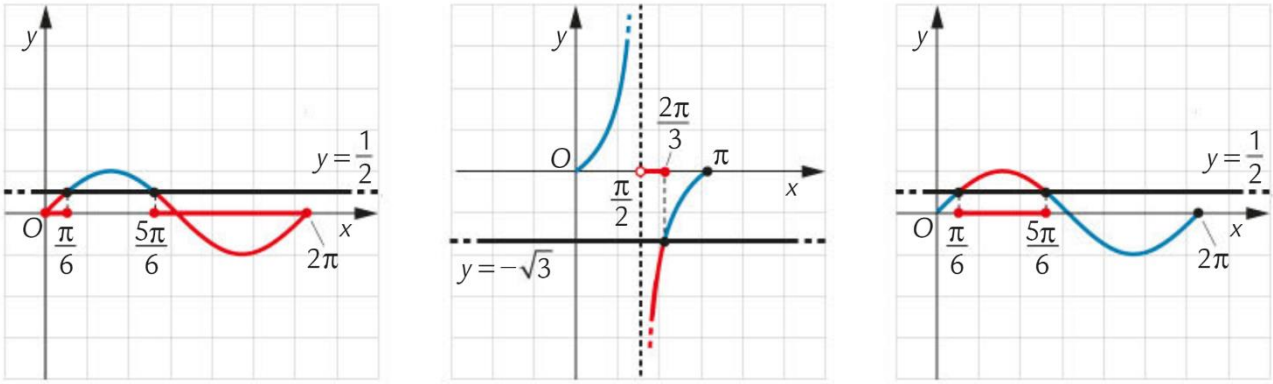
Scrivi le disequazioni che hanno rispettivamente i seguenti grafici delle soluzioni e commenta le tue scelte.



Problema numero 4 – PUNTI 3 GB 2021

Per ciascuna figura

1. scrivi la disequazione che è stata rappresentata graficamente e di cui gli intervalli colorati in rosso sull'asse x rappresentano le soluzioni nell'intervallo considerato
2. rappresenta le stesse soluzioni sulla circonferenza goniometrica



NOME:

_____

RISOLVI – PUNTI 1, 2, 1, 1. 3

a) $\frac{2 \cdot senx+1}{cosx+1} > 0$

b) $\frac{cos2x}{2 \cdot cosx+1} \leq 0$

c) $cosx \cdot (tgx + 1) > 0$

d) $1 - \cos^2 x - senx \cdot cosx < 0$

e) $\begin{cases} tg^2x \geq \sqrt{3} \cdot tgx \\ \cos^2 x - sen^2x < 0 \end{cases}$

VALUTAZIONE

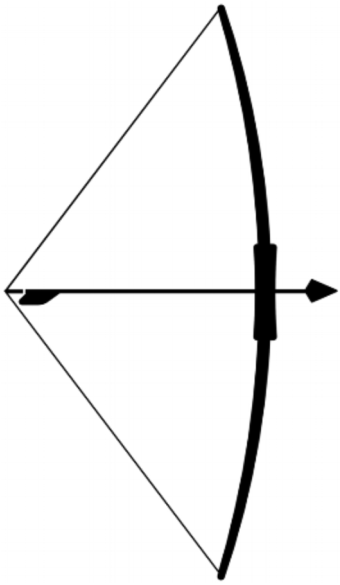
La valutazione prevede, per ogni punteggio assegnato, una distribuzione percentuale su ogni quesito. La ripartizione sarà la seguente:

un massimo, pari al 75%, verrà assegnato per la qualità dei contenuti + un massimo del 25% verrà assegnato per la forma.

Elaborato sulla Goniometria – Vincenzo Sabella

All'interno del seguente elaborato verranno svolti con istruzioni e spiegazioni definite differenti quesiti attenenti alla branca della Goniometria.
È necessario avere delle conoscenze in merito alla risoluzione di equazioni e disequazioni ordinarie per poter godere appieno del prodotto.
Per la comprensione di alcuni termini, espressioni e passaggi verrete rimandati ad un glossario presente al termine dell'elaborato, rimando subito alla prime note in P.1 e P.2. Buona lettura.

Il primo quesito che andremo a trattare è un problema riguardante un arco, lo strumento.



QUESITO:
Non sappiamo quando e come fu inventato l'arco, ma fin dalla preistoria rappresentazioni grafiche rupestri ne documentano l'uso. Nel corso della sua storia, questo straordinario strumento, ha subìto costanti miglioramenti rivelandosi fondamentale negli eventi che hanno determinato il percorso dell'umanità. Un arciere Romano volle sperimentare l'uso di un arco che aveva progettato un dotto alchimista del suo tempo. L'arco, rettificato, aveva la stessa misura delle frecce che scoccava e il dotto fornì la misura di arco e frecce al soldato Romano dicendo che entrambe le misure scaturivano dalla disequazione $1-2\cos^2(x)\geq 0$.
Attualizzando e riportando in metri i risultati scaturiti dalla circonferenza goniometrica, qual è la misura di arco e frecce.

SVOLGIMENTO:
Per la risoluzione del problema cominciamo risolvendo la disequazione indicata dal problema.

$$1-2\cos^2(x)\geq 0$$
$$-2\cos^2(x)\geq -1$$ Passaggio spiegato nel punto R.1
$$2\cos^2(x)\leq 1$$
$$\cos^2(x)\leq \frac{1}{2}$$

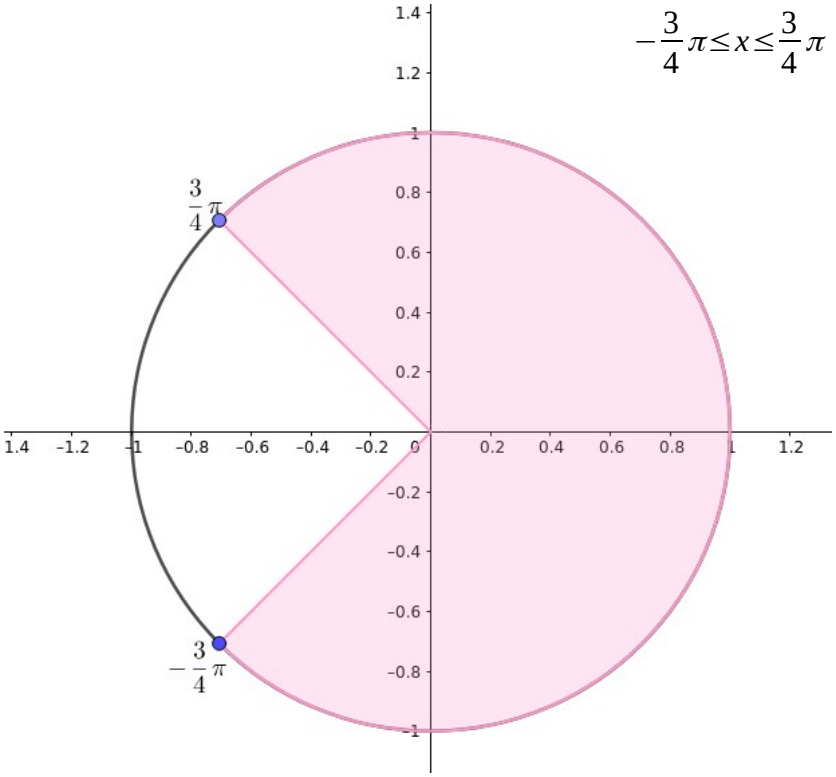
Arrivati a questo punto non è più possibile procedere se non affidandoci all'equazione associata, che in questo caso è $\cos^2(x)=\frac{1}{2}$ dunque:

$$\cos^2(x)=\frac{1}{2}$$
$$\cos(x)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$ Passaggio in R.2

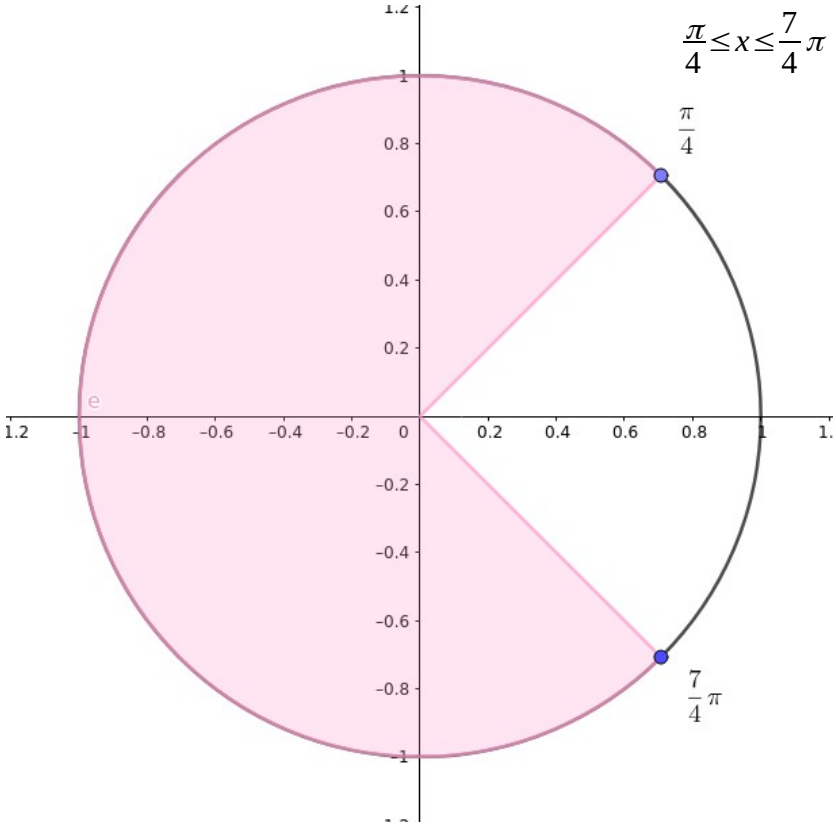
Ora sappiamo quali sono gli zeri della disequazione, ora, considerato che il coefficiente dell'elemento di secondo grado è positivo e che il segno della disequazione è minore o uguale, la disequazione è soddisfatta per valori interni agli zeri. Ergo le soluzioni sono $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ora dobbiamo trovare le x per cui questa condizione è vera, di conseguenza innanzitutto trattiamo separatamente i termini:

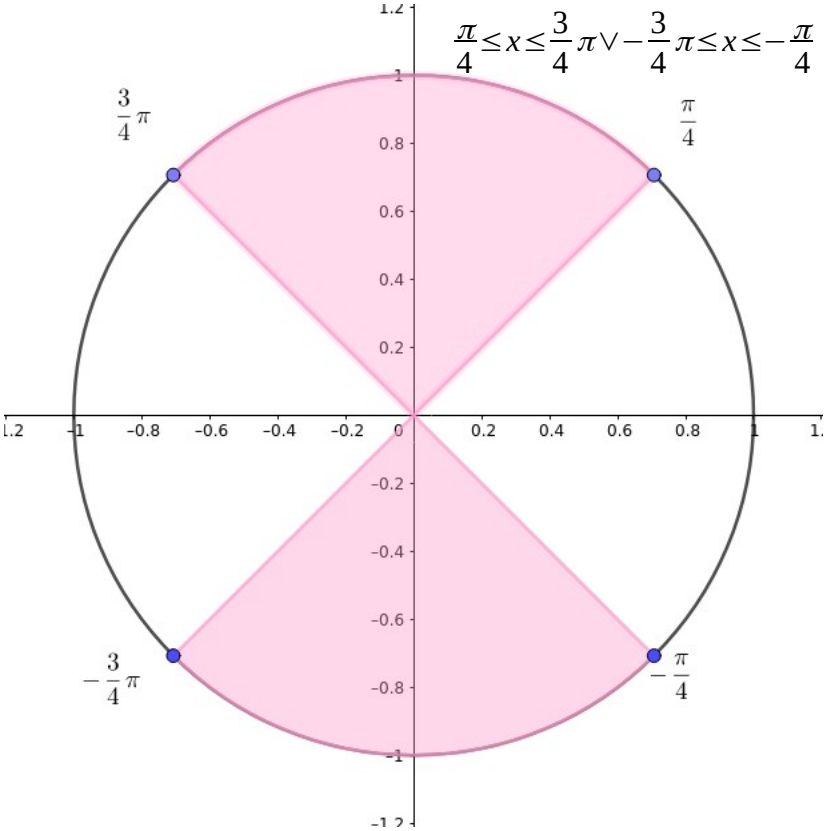
$\cos(x) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ da come soluzioni:



$\cos(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ da invece come soluzioni:



Andandole a confrontare otteniamo come soluzioni dell'intera disequazione:



Ora per continuare con la risoluzione del problema c'è da calcolare la lunghezza dell'arco delle soluzioni di x, innanzitutto sappiamo che l'angolo è uguale a $\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{2}{4}\pi = \frac{\pi}{2}$ o $-\frac{\pi}{4} - (-\frac{3}{4}\pi) = -\frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\pi = \frac{\pi}{2}$, due misure identiche.
La formula per calcolare l'arco di una circonferenza è $l(metri) = \alpha(rad) \cdot r(metri)$, dato che siamo su una circonferenza goniometrica $r = 1\,m$ ergo il calcolo da fare è:

Passaggio spiegato in P.3

$$l = \frac{\pi}{2} \cdot 1\,m$$

$$l = \frac{\pi}{2} m$$

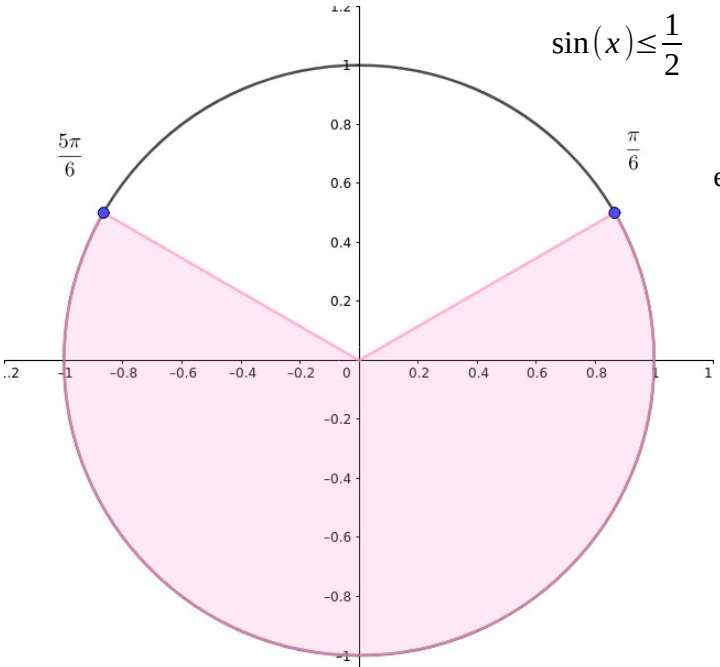
$$l = 1{,}57\,m$$

SOLUZIONE:
Il nostro arco è dunque lungo $1{,}57\,m$ e così anche le frecce che vengono usate dall'arco.

Il prossimo quesito che tratterò parla di tre amici che fanno una scommessa.

QUESITO:
Aldo, Giovanni e Giacomo tifano per tre diverse squadre di serie A. Seguono da tempo la loro squadra del cuore e spesso si confrontano sulle prestazioni offerte dalle formazioni di cui sono sostenitori. Ogni tifoso è convinto che la squadra per cui parteggia sia la più offensiva. Un giorno ingaggiano una singolare scommessa. I tre amici, nel corso di una giornata di campionato in cui le tre squadre incontrano tre avversarie di pari livello, registrano gli eventi e cronometrano, con un comune orologio analogico, le azioni più lunghe nell'area avversaria. Sono riportati in rosso i tempi, espressi in secondi, forniti dalle tre squadre.
1. Riporta su una circonferenza goniometrica i settori circolari e scrivi le disequazioni compatibili con gli intervalli rappresentati
2. Scrivi l'ampiezza di ogni angolo descritto dalla lancetta dei secondi
3. Scrivi e risolvi il sistema rappresentato dalle tre disequazioni
4. Descrivi la relazione che intercorre tra i secondi trascorsi nelle tre rilevazioni e le rispettive ampiezze angolari
5. Stabilisci e giustifica se il sistema $\begin{cases} \sin(x) \geq 0 \\ \cos(x) \geq 0 \end{cases}$, può avere soluzioni descritte da una delle rappresentazioni in figura.

Q.1
Il primo passo ci chiede di raffigurare i tre intervalli di tempo sulla circonferenza goniometrica, è sufficiente analizzare poi il grafico per comprendere in che punti vanno a terminare gli intervalli. Il passaggio dall'orologio alla circonferenza goniometrica è possibile se si considera l'orologio come una circonferenza goniometrica di 2π divisa in esattamente 12 pezzi. A quel punto sappiamo che fra un'ora e l'altra intercorre un settore di ampiezza $\frac{\pi}{6}$.
Alla seguente pagina sono riportate le tre circonferenze richiesteci da questo primo punto, queste saranno accompagnate dalle equazioni che danno vita alle stesse circonferenze, queste equazioni sono state ottenute a partire dall'osservazione del grafico. Procedo al controllo delle disequazioni.



$$\sin(x) \leq \frac{1}{2}$$

eq. associata

$$\sin(x) = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$$

con periodicità $2k\pi$

$$x_1 = \frac{1}{6}\pi$$

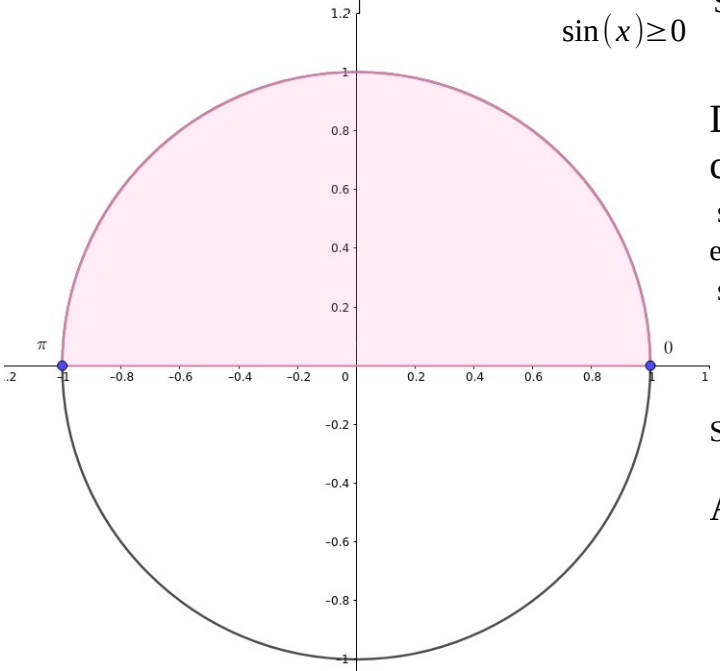
$$x_2 = \pi - \frac{1}{6}\pi$$

Passaggio in R.3

$$x_2 = \frac{5}{6}\pi$$

Soluzioni:

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \vee \frac{5}{6}\pi \leq x \leq 2\pi$ con periodicità $2k\pi$



Dunque la prima disequazione è corretta, procedo con la seconda.

$$\sin(x) = 0$$

eq. associata

$$\sin(x) = 0$$

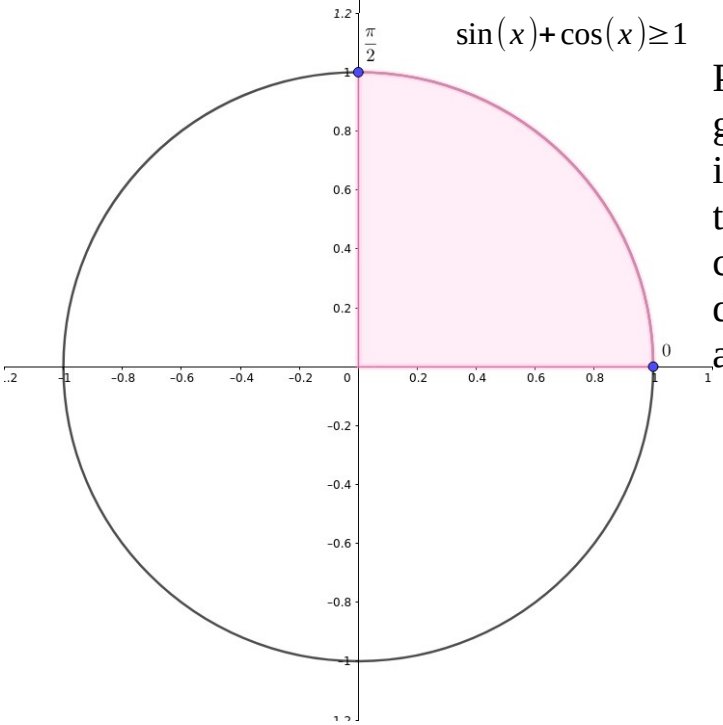
$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \pi$$

Soluzioni:

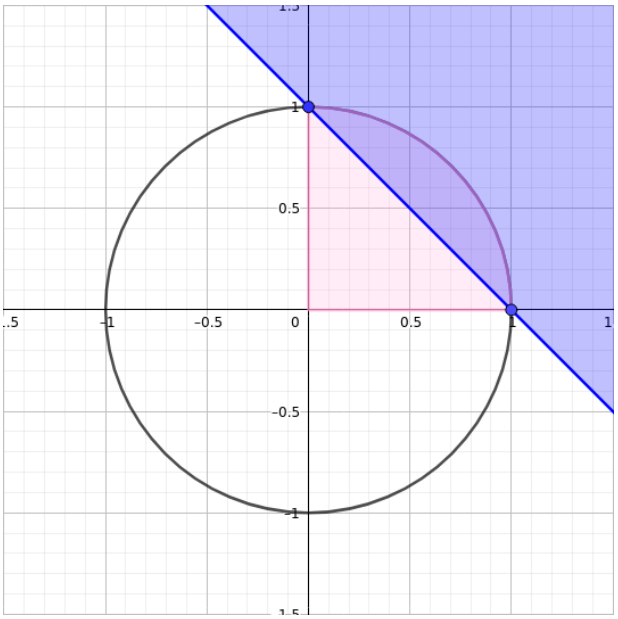
$0 \leq x \leq \pi$

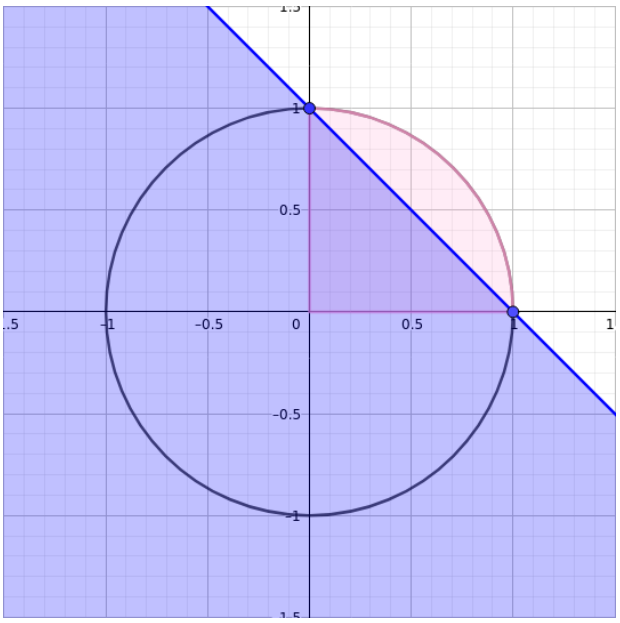
Anche questa è corretta.



Per ottenere la disequazione del terzo grafico, che potrebbe non essere immediata come le altre due dobbiamo trovare il semipiano che intersecato con la circonferenza ci da tutti i punti della circonferenza presenti nella zona accettata.

Innanzitutto possiamo (e dobbiamo) trovarci la retta che da origine a questo semipiano con le informazioni che abbiamo a disposizione.
Senza dover fare il calcolo di una retta passante per due punti (riportato in R.4 per completezza) possiamo ottenere la retta considerando che questa passa per 1 con X = 0, dunque che è una dipendenza lineare della forma $y=mx+q$ con $q=1$ e che il suo coefficiente angolare è $m=\frac{0-1}{1-0}$ ovvero $m=-1$.
Dunque abbiamo $Y=1-X$. Ora, da questa retta possono avere origine quattro semipiani di cui due includono i punti della retta (chiusi) e altri due li escludono (aperti). Per il nostro caso prendiamo i due semipiani chiusi (così da includere $(0,1)$ e $(1,0)$). Mettiamo a sistema i semipiani con la circonferenza goniometrica e fra i due sistemi $\begin{cases} Y \geq 1-X \\ X^2+Y^2=1 \end{cases}$ e $\begin{cases} Y \leq 1-X \\ X^2+Y^2=1 \end{cases}$ (entrambi con $Y=\sin(x), X=\cos(x)$) cerchiamo di capire quale ci da le soluzioni che stiamo cercando.





Il primo sistema è raffigurato a sinistra, il secondo a destra.
In nero la circonferenza, in rosa le soluzioni di cui abbiamo bisogno e in blu il semipiano e la sua retta di origine.
Possiamo, osservando i grafici, notare che il semipiano che include le nostre soluzioni sia quello raffigurato a sinistra, $Y \geq 1-X$. Ora, considerato che questa disequazione è stata messa a sistema con una circonferenza goniometrica e che sappiamo già fornirci soluzioni assieme ad essa, possiamo sfruttando la conoscenza di $Y=\sin(x), X=\cos(x)$ convertirla in una disequazione in seno e coseno, che non comprenderà più tutto il semipiano bensì soltanto la parte del semipiano sottesa alla circonferenza. Dunque otteniamo $\sin(x) \geq 1-\cos(x)$, riscrivibile in $\sin(x)+\cos(x) \geq 1$. Risolvendo questa disequazione troveremo come soluzione $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ con periodicità $2k\pi$.

Data la precedente spiegazione eviterò di riportare il calcolo in quanto la congruenza delle soluzioni è stata ampiamente dimostrata graficamente.

Q.2

Il primo angolo spazzato dalla lancetta dei secondi è di ampiezza $\frac{4}{3}\pi$, il secondo è di ampiezza π , il terzo di ampiezza $\frac{\pi}{2}$.

Queste ampiezze possono essere facilmente calcolate a partire dalle soluzioni in nostro possesso.

Q.3

Un sistema composto dalle tre disequazioni è il seguente:

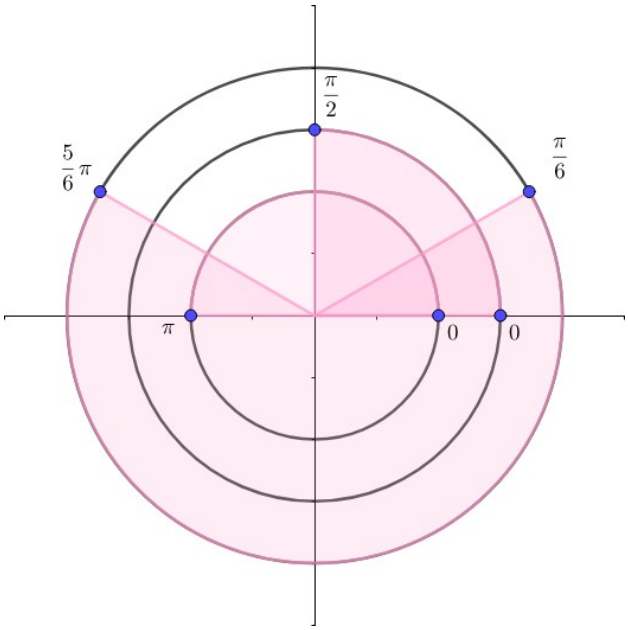
$$\begin{cases} \sin(x) \geq 0 \\ \cos(x) \geq 0 \end{cases}$$

Ne possediamo già le soluzioni quindi non è necessario eseguire alcun calcolo quanto piuttosto dobbiamo mettere a sistema le soluzioni.

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \vee \frac{5}{6}\pi \leq x \leq 2\pi \\ 0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Le soluzioni accettate dal sistema sono:

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$



Q.4

Un intero orologio è fatto per percorrere $60s$ in una circonferenza completa ampia 2π . Tramite una proporzione possiamo calcolare l'angolo spazzato da una lancetta in un secondo: $60s : 1s = 2\pi : x$.

Risolvendola otteniamo $x = \frac{2\pi}{60s} = \frac{1}{30}\pi \ rad/s$.

Dunque possiamo dire che in tutte e tre le rilevazioni la lancetta dei secondi ogni secondo spazza un angolo di un trentesimo di pi greco.

Nella prima rilevazione abbiamo:

$$\frac{\frac{4}{3}\pi}{\frac{1}{30}\pi \ rad/s} = 40s$$

Nella seconda:

$$\frac{\pi}{\frac{1}{30}\pi \ rad/s} = 30s$$

Nella terza:

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{30}\pi \ rad/s} = 15s$$

Q.5

Per rispondere al quesito procedo con la risoluzione del sistema:

$$\begin{cases} \sin(x) \geq 0 \\ \cos(x) \geq 0 \end{cases}$$

Il seno è maggiore od uguale a zero nell'intervallo che va da 0 a π mentre il coseno è maggiore od uguale a zero nell'intervallo che va da $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$, in entrambi i casi estremi inclusi.

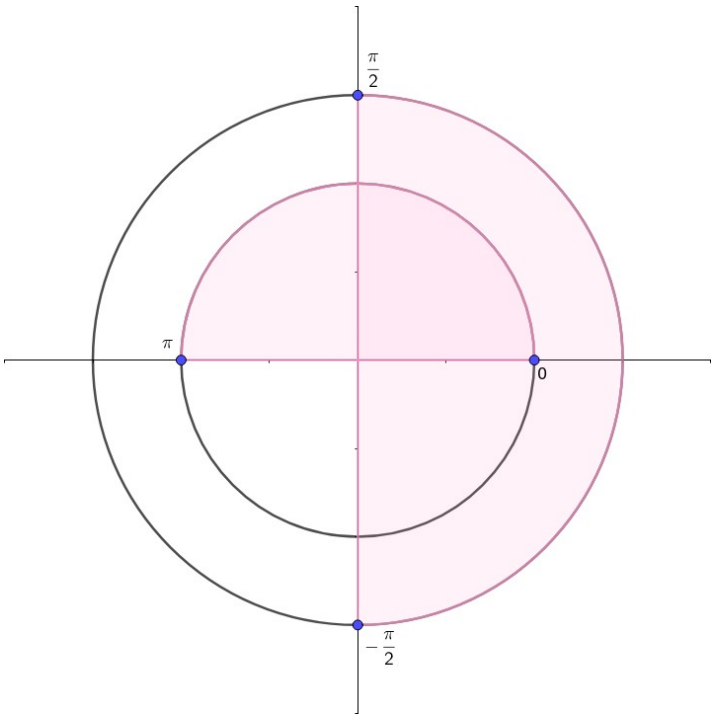
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Proseguo direttamente con il grafico delle soluzioni del sistema.

Il nostro sistema accetta come soluzioni:

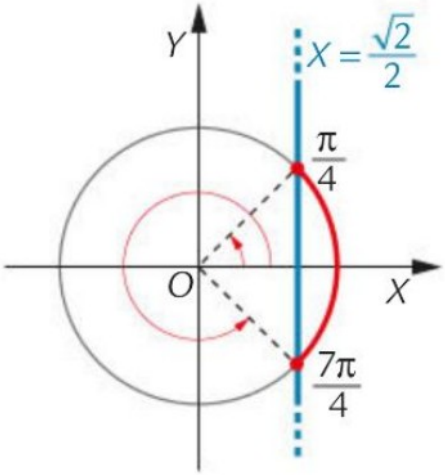
$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

Esattamente l'intervallo descritto dalla terza rappresentazione.

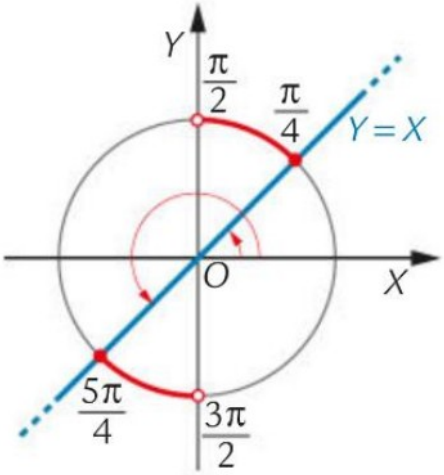


Anche i prossimi quesiti, consistono nell'analisi di alcuni grafici.

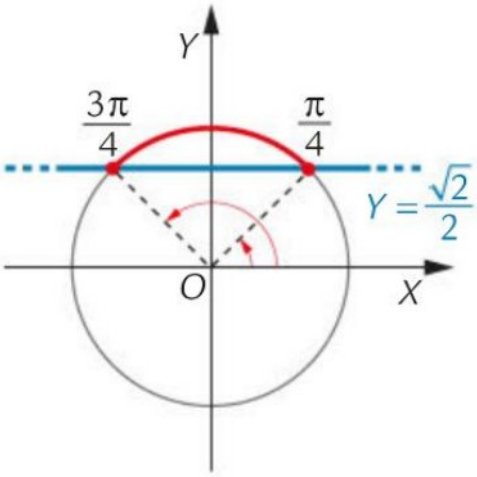
QUESITO:
Scrivi le disequazioni che hanno rispettivamente i seguenti grafici delle soluzioni e commenta le tue scelte.



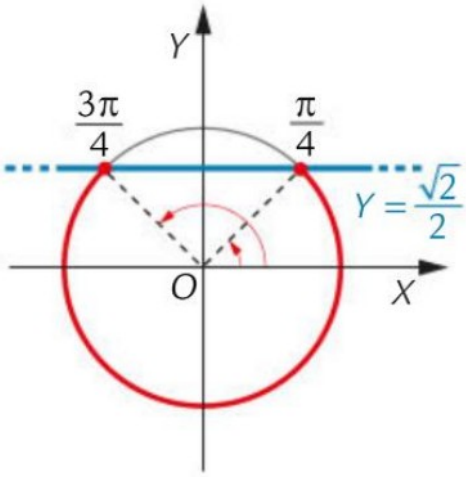
A.



C.



B.



D.

SOLUZIONI:
A.
Il primo grafico scaturisce dalla disequazione $\cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Innanzitutto perché $\arccos(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$, poi c'è da considerare che la parte colorata in rosso che dunque rappresenta le soluzioni accettabili è posizionata dopo il valore di $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B.
Il secondo grafico scaturisce dalla disequazione $\sin(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Per questa vale lo stesso identico discorso della precedente ma applicata al seno e dunque all'asse delle ascisse.

C.

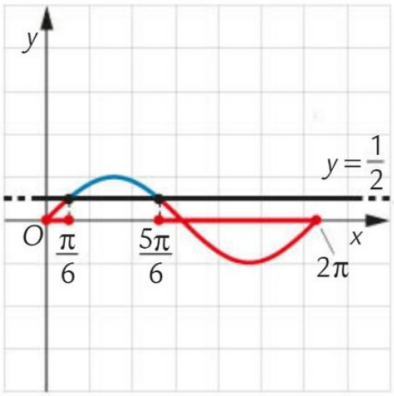
Qui ci ritroviamo davanti ad una tangente, questo perché sono esclusi gli estremi $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{2}\pi$ in cui ricordiamoci la tangente non esiste e perché la periodicità delle nostre soluzioni è $k\pi$ con $k \in \mathbb{N}$. La disequazione è $\tan(x) \geq 1$. Perché 1 ? Perché nel punto in cui $X = Y$ allora $\cos(x) = sen(x)$ e dunque la tangente, che è il rapporto fra i due sarà $\tan(x) = 1$. In 1 abbiamo $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. L'uguale è derivato dal fatto che il pallino di $\frac{\pi}{4}$ è pieno e il maggiore dal fatto che la parte rossa, quella che indica le soluzioni accettate va verso $\frac{\pi}{2}$ che è quella parte della circonferenza dove la tangente tende a $+\infty$

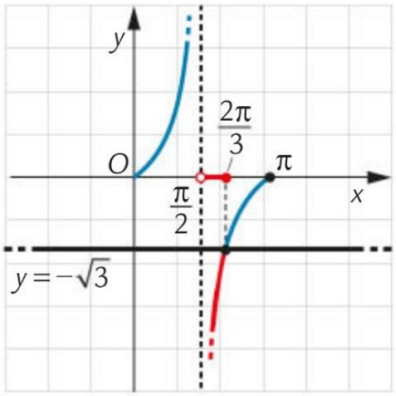
D.

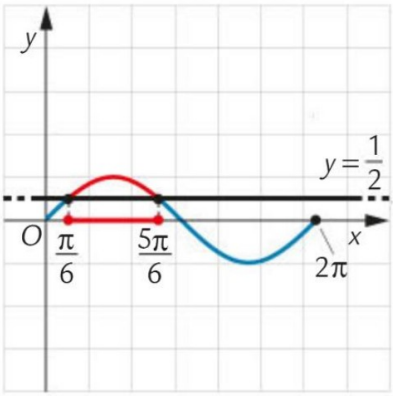
Il quarto grafico è praticamente identico a quello della B ma con la differenza che $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ invece che maggiore in quanto la parte colorata in rosso è quella che comprende soluzioni inferiori a quel punto.

QUESITO:

Per ciascuna figura:
1. Scrivi la disequazione che è stata rappresentata graficamente e di cui gli intervalli colorati in rosso
sull'asse x rappresentano le soluzioni nell'intervallo considerato
2. Rappresenta le stesse soluzioni sulla circonferenza goniometrica.





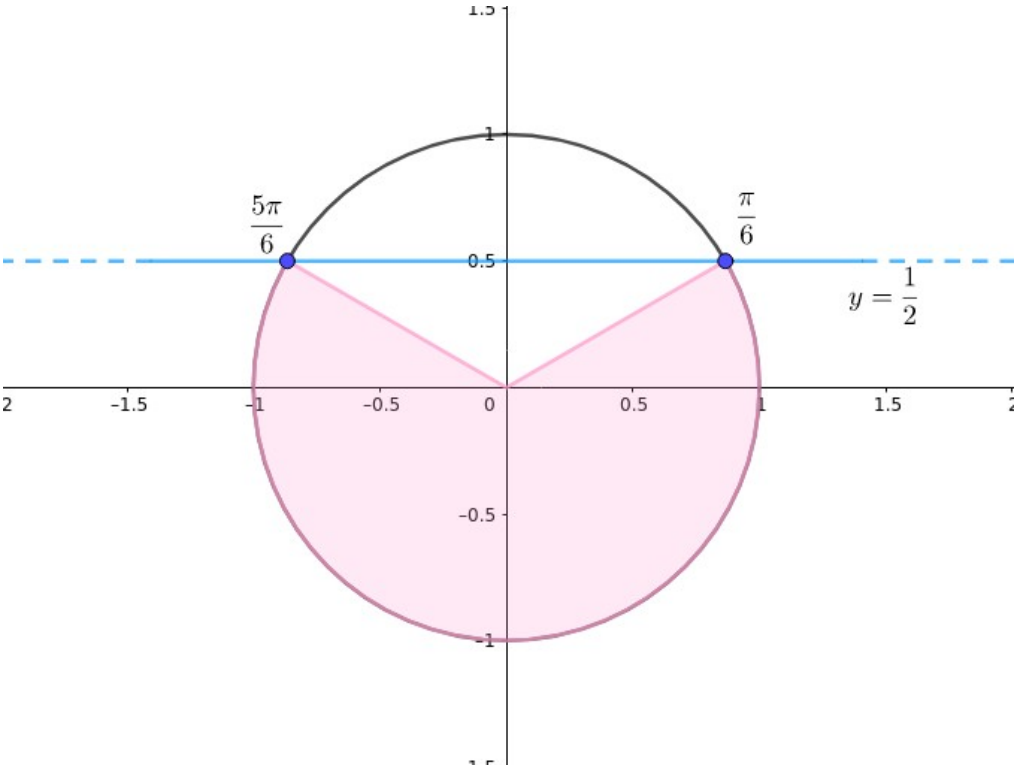


Q.1

Innanzitutto questo grafico è una sinusoide in quanto ha origine nello 0 (quindi non può essere una cosinusoide).

Poi, la parte di soluzioni accettata consiste in tutte le soluzioni in cui $y \leq \frac{1}{2}$. E che $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \vee \frac{5}{6}\pi \leq x \leq 2\pi$. Considerate queste informazioni la disequazione rappresentata graficamente è $\sin(x) \leq \frac{1}{2}$.

Ora, sapendo tutto ciò possiamo riportare il tutto su una circonferenza goniometrica.

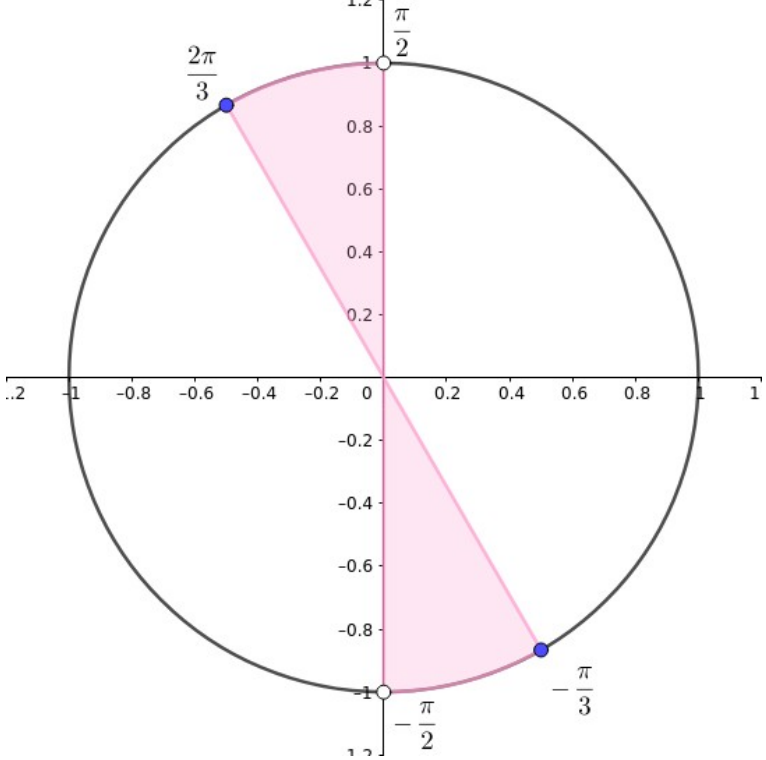


Q.2

Questo grafico è una tangentoide, si può capire dalla forma e dall'asintoto in $\frac{\pi}{2}$. Considerato che la parte in rosso è quella che va verso $-\infty$ e che parte in $y = -\sqrt{3}$ e anche che $\frac{2}{3}\pi \leq x < \frac{\pi}{2}$ allora la nostra disequazione sarà $\tan(x) \leq -\sqrt{3}$.

Potremmo in realtà basarci anche solo sulla terza informazione in quanto la più completa, dato che le abbiamo, per comodità sfruttiamo anche le altre due. La terza informazione poi è necessaria per capire se mettere o meno l'uguale oltre al minore.

Ora, sapendo tutto ciò possiamo riportare il tutto su una circonferenza goniometrica.

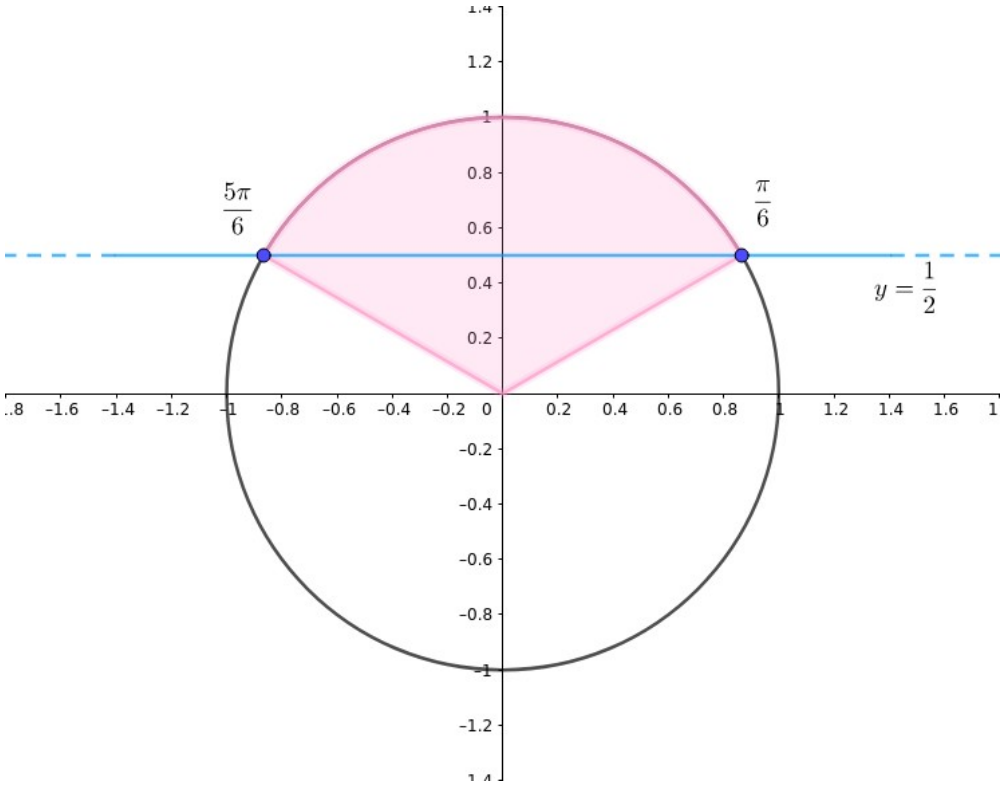


Q.3

Qui ci troviamo ad un'altra sinusoide ed è lo stesso identico caso del primo grafico ma stavolta le soluzioni sono per $y \geq \frac{1}{2}$, dunque $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$.

La disequazione che ne scaturisce è $\sin(x) \geq \frac{1}{2}$.

Ora, sapendo tutto ciò possiamo riportare il tutto su una circonferenza goniometrica.



Nella parte di elaborato che segue verranno risolte alcune disequazioni goniometriche.

a) $\frac{2 \cdot senx+1}{cosx+1} > 0$

b) $\frac{cos2x}{2 \cdot cosx+1} \leq 0$

c) $cosx \cdot (tgx+1) > 0$

d) $1-\cos^2 x - senx \cdot cosx < 0$

e) $\begin{cases} tg^2x \geq \sqrt{3} \cdot tgx \\ \cos^2 x - sen^2x < 0 \end{cases}$

a.

$\frac{2 \cdot \sin(x)+1}{\cos(x)+1} > 0$

Passaggio in R.4

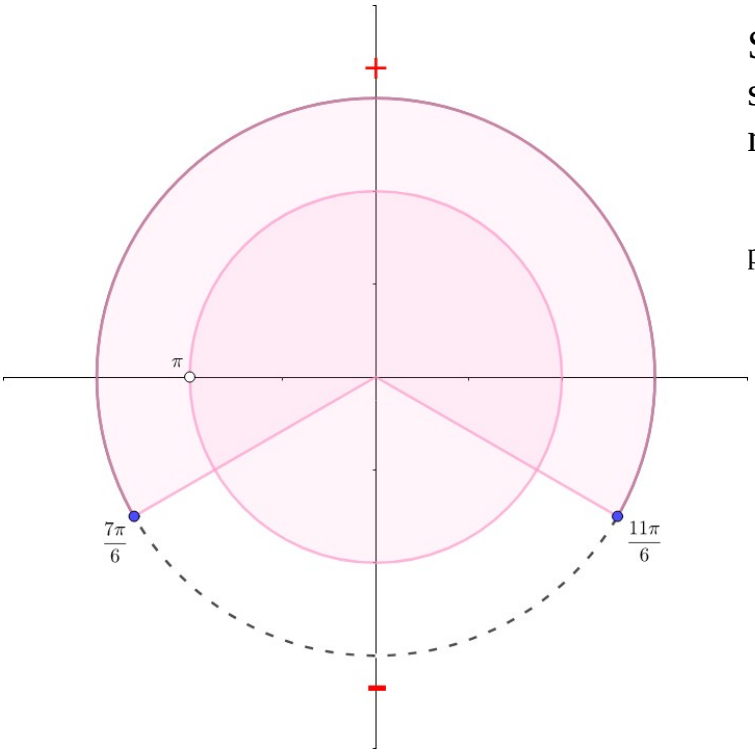
$N: 2 \cdot \sin(x)+1 > 0$

$N: \sin(x) > -\frac{1}{2}$

$D: \cos(x) > -1$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \neq \pi + 2k\pi$

$0 \leq x \leq \frac{7}{6}\pi \vee \frac{11}{6}\pi \leq x \leq 2\pi$ Con periodicità $2k\pi$



Sulla sinistra v'è il grafico delle soluzioni. Da questo possiamo ricavare che la soluzione è:

$0 \leq x < \pi \vee \pi < x < \frac{7}{6}\pi \vee \frac{11}{6}\pi \leq x \leq 2\pi$

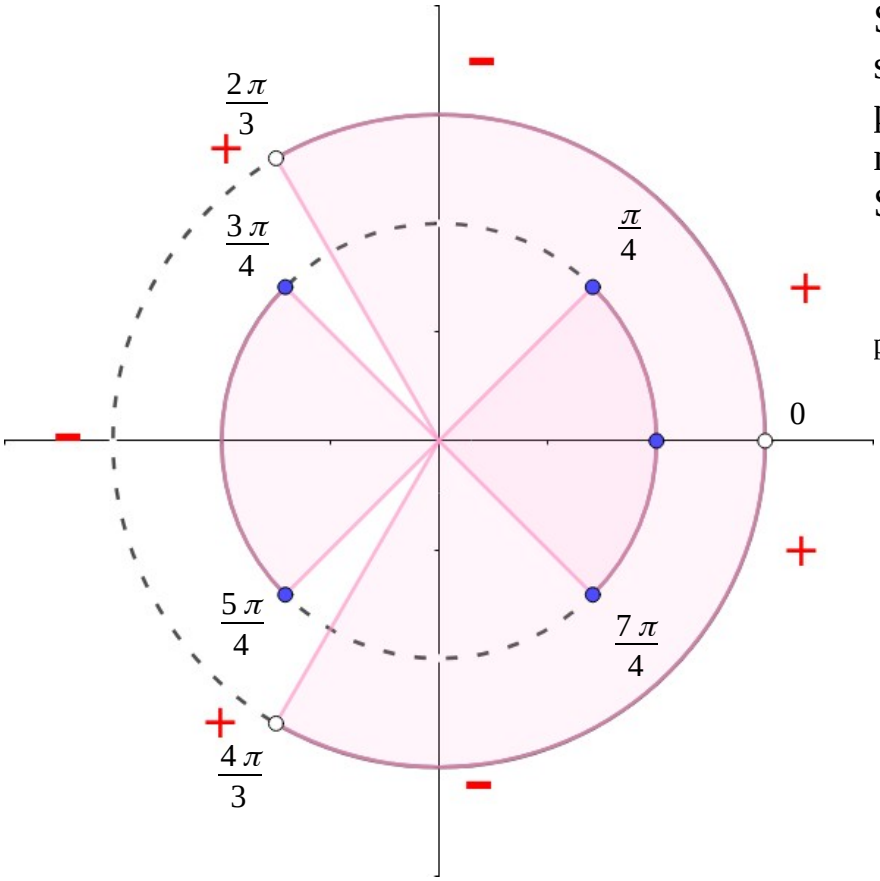
periodicità $2k\pi$

b.

$$\frac{\cos(2x)}{2\cos(x)+1}\leq 0 \qquad \frac{2\cos^2(x)-1}{2\cos(x)+1}\leq 0$$

$$N: 2\cos^2(x)-1\geq 0$$
$$\cos^2(x)\geq\frac{1}{2}$$
$$eq.ass:\ \cos^2(x)=\frac{1}{2}$$
$$\cos(x)=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\cos(x)\leq-\frac{\sqrt{2}}{2}\vee\cos(x)\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$x=\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\quad x=-\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$x=\pi-\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\quad x=-\pi+\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$Sol: 0\leq x\leq\pi\vee\frac{3}{4}\pi\leq x\leq\frac{5}{4}\pi\vee\frac{7}{4}\pi\leq x<2\pi$$

$$D: 2\cos(x)+1>0$$
$$\cos(x)>-\frac{1}{2}$$
$$x=\pi-\arccos\left(\frac{1}{2}\right)\quad x=-\pi+\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$Sol: 0<x<\frac{2}{3}\pi\vee\frac{4}{3}\pi<x<2\pi$$



Sulla sinistra il grafico delle soluzioni. Dobbiamo prendere le soluzioni negative.
Soluzioni:

$$\frac{\pi}{4}\leq x\leq\frac{2}{3}\pi\vee\frac{3}{4}\pi\leq x\leq\frac{5}{4}\pi\vee\frac{4}{3}\pi<x\leq\frac{7}{4}\pi$$

periodicità $2k\pi$

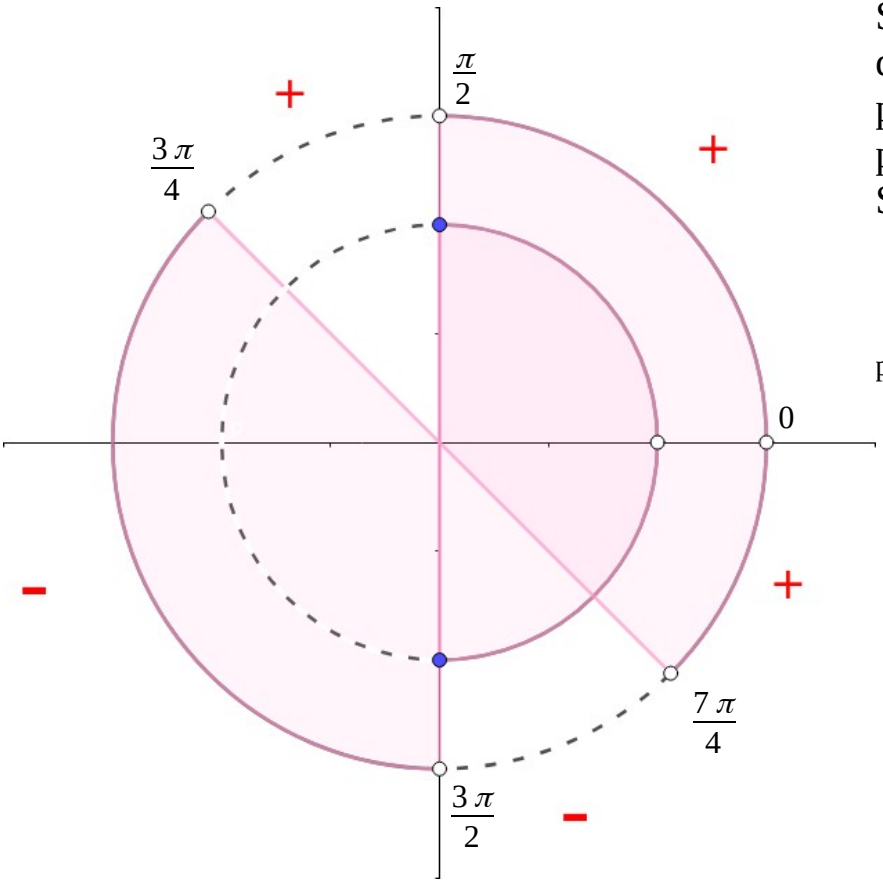
c.

$$\cos(x)\cdot(\tan(x)+1)>0$$
$$\cos(x)>0$$
$$x=\arccos(0)$$
$$Sol_1: 0<x<\frac{\pi}{2}\vee\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$$

Con periodicità $2k\pi$

$$\tan(x)+1>0$$
$$\tan(x)>-1$$
$$x=\arctan(-1)$$
$$Sol_2: \frac{3}{4}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$$

Con periodicità $k\pi$



Sulla sinistra il grafico delle soluzioni. Dobbiamo prendere le soluzioni positive.
Soluzioni:

$$0<x<\frac{\pi}{2}\vee\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{4}\pi\vee\frac{7}{4}\pi<x<2\pi$$

periodicità $2k\pi$

d.

$$1-\cos^2(x)-sen(x)\cos(x)<0$$

$$\frac{sen^2(x)}{\cos^2(x)}-\frac{sen(x)\cos(x)}{\cos^2(x)}<0$$

In questo passaggio riscritto 1 come $\cos^2(x)+sen^2(x)$ servendomi della prima relazione fondamentale, ho eliso $+\cos^2(x)$ e $-\cos^2(x)$ e poi ho diviso tutto per $\cos^2(x)$ in modo da ottenere una singola disequazione di secondo grado con la tangente

$$\tan^2(x)-\tan(x)<0$$

$$\tan(x)\cdot(\tan(x)-1)<0$$

$$\tan(x)>0$$

$$x=\arctan(0)$$

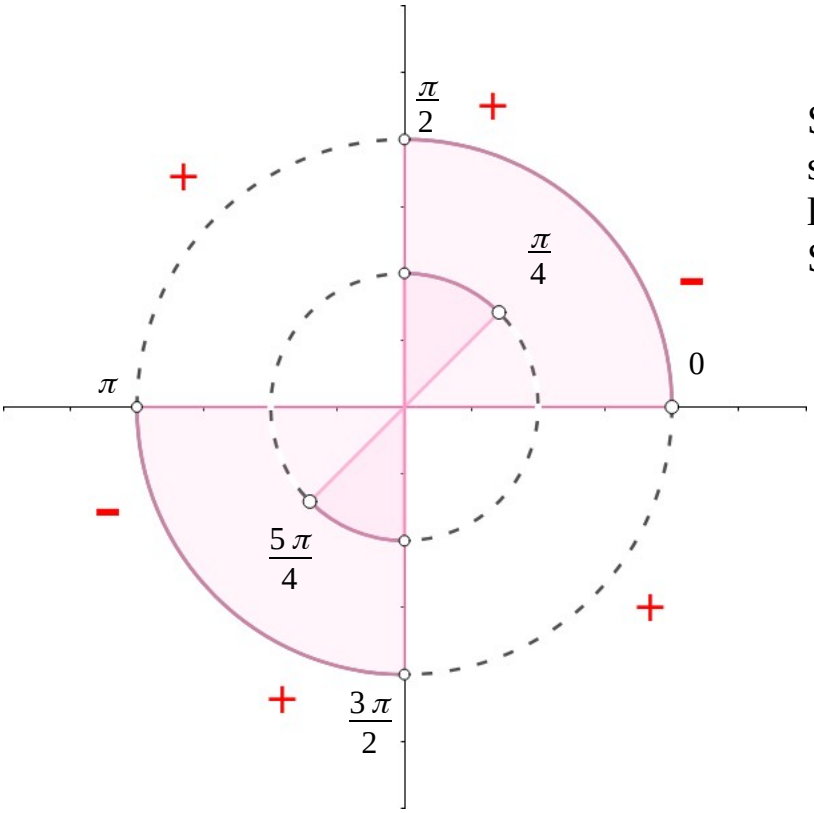
$$0<x<\frac{\pi}{2}$$

con periodicità $k\pi$

$$\tan(x)>1$$

$$\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$$

con periodicità $k\pi$



Sulla sinistra il grafico delle soluzioni, dobbiamo prendere le soluzioni negative.
Soluzioni:

$0<x<\frac{\pi}{4}$ con periodicità $k\pi$

e.

$$\begin{cases} \tan^2(x) \geq \sqrt{3}\tan(x) \\ \cos^2(x) - sen^2(x) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan^2(x) - \sqrt{3}\tan(x) \geq 0 \\ 1 - \tan^2(x) < 0 \end{cases}$$

Risoluzione della prima:

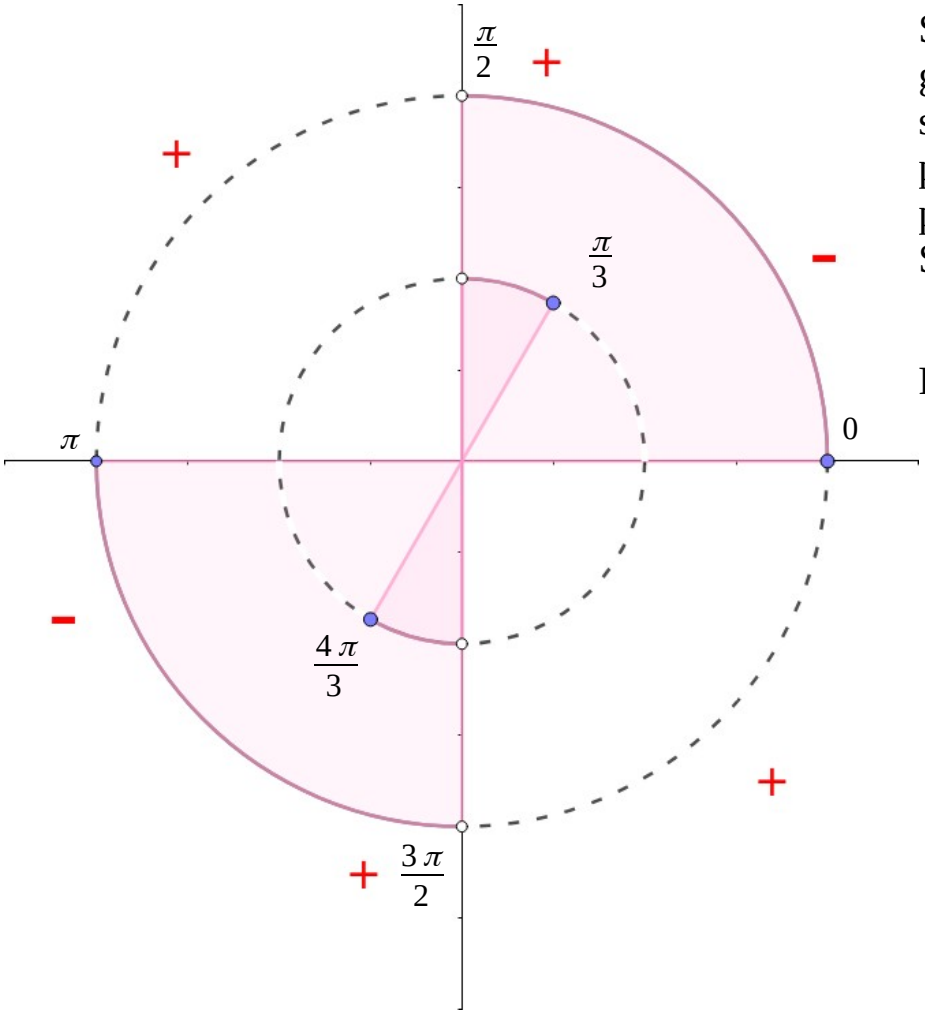
$$\tan(x)\cdot(\tan(x) - \sqrt{3}) \geq 0$$

$$\tan(x) \geq 0$$

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \qquad \text{Periodicità} \quad k\pi$$

$$\tan(x) \geq \sqrt{(3)}$$

$$\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2} \qquad \text{Periodicità} \quad k\pi$$



Sulla sinistra il grafico delle soluzioni. Dobbiamo prendere le soluzioni positive.

Soluzioni:

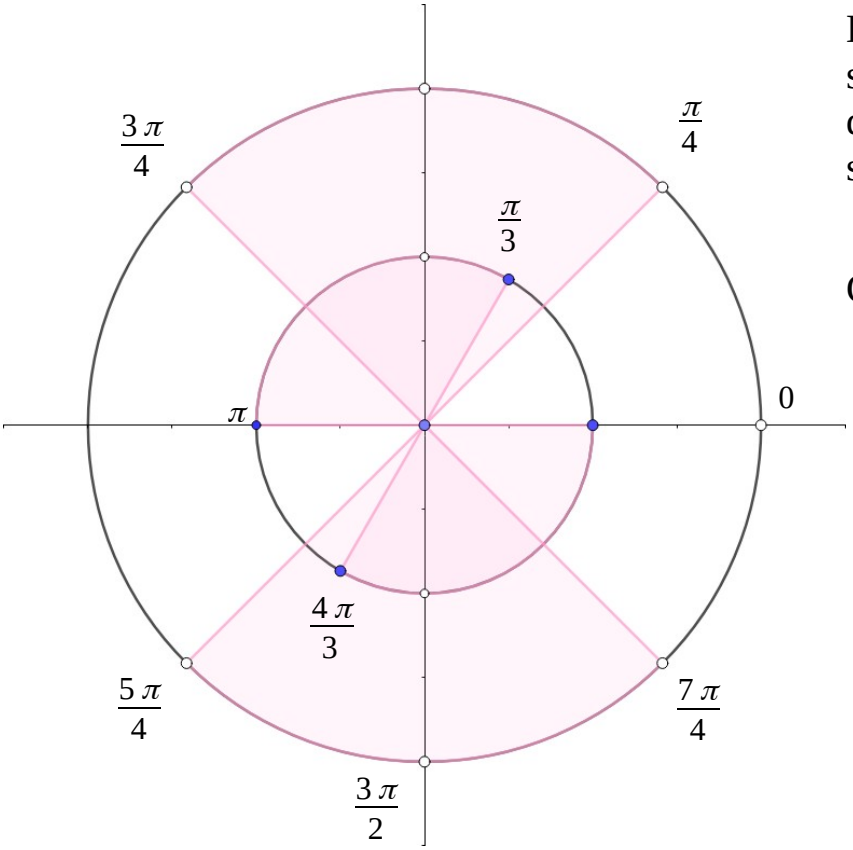
$$\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{3}{2}\pi < x \leq 2\pi$$

Periodicità $k\pi$

Risoluzione della seconda:

$$1-\tan^2(x)<0$$
$$\tan^2(x)>1$$
$$eq.ass:\tan^2(x)=1$$
$$\tan(x)=\pm 1$$
$$\tan(x)<-1 \vee \tan(x)>1$$
$$Sol:\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2} \vee \frac{3}{2}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$$

Grafico delle soluzioni del sistema:



Dal grafico traggo le soluzioni in comune, dunque le soluzioni del sistema sono:

$$\frac{\pi}{3}\leq x<\frac{\pi}{2} \vee \frac{3}{2}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$$

Con periodicità $k\pi$

Note riguardanti l'elaborato

R – Rinfreschiamoci la memoria

I punti seguenti tratteranno alcune nozioni che potrebbero sfuggire ad una mente non allenata che fanno parte della base delle conoscenze necessarie

R.1 – Inversione del segno

Nel momento in cui si moltiplicano o dividono per una quantità negativa entrambi i termini di una disequazione è necessario invertire il segno della stessa, il maggiore passa a minore ed il minore passa a maggiore, gli uguali restano invariati.

R.2 – Razionalizzazione di una frazione con radice al denominatore

Le radici possono essere fastidiose ed allo stesso modo brutte da guardare, è per questo che quando ci si ritrova con una radice al denominatore di una frazione:

$\sqrt{\frac{1}{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$

si moltiplicano entrambi i membri della frazione per la radice:

$$\frac{1\cdot\sqrt{(2)}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$$

ed otteniamo:

$$\frac{\sqrt{(2)}}{2}$$

R.3 – Soluzioni sin(x) = z, cos(x) = z

Nel momento in cui andiamo a calcolare le soluzioni di una delle equazioni indicate qui sopra, noi possiamo ottenere sulla x ben due soluzioni e non una sola.
Questo perché ognuna delle due funzioni seno e coseno ha per ogni valore due angoli che possono esprimerlo.
Quando si tratta del coseno noi sappiamo che il coseno è uguale a se stesso in $\cos(x)$ e in $\cos(-x)$ ($\cos(x)=\cos(-x)$), dunque le due soluzioni x_1 e x_2 saranno $x_1=\arccos(z)$, $x_2=-\arccos(z)$.
Quando trattiamo invece il seno questo è uguale a se stesso con la variazione di $\pi-x$ se partiamo in senso antiorario o $-\pi-x$ se partiamo dal senso orario. $sen(x)=sen(\pi-x)$, $sen(x)=sen(-\pi-x)$. Le due soluzioni x_1 e x_2 saranno $x_1=\arcsin(x)$, $x_2=\arcsin(\pi-z)$ ($x_2=\arcsin(-\pi-z)$).

R.4 – Retta per due punti

Per calcolare una retta passante per due punti $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ possiamo usare la seguente relazione $\frac{y+y_a}{x+x_a}=\frac{y_a+y_b}{x_a+x_b}$

R.5 – Disequazione fratta / Come prodotto
Nel caso di una disequazione fratta si pongono numeratore e denominatore separatamente, entrambi maggiori di zero (nel caso in cui la disequazione originale presenti un uguale assieme al maggiore o al minore al numeratore viene aggiunto l'uguale, il denominatore è strettamente maggiore in quanto lo zero renderebbe impossibile la frazione). A questo punto si calcolano i risultati e poi li si unisce tramite la regola dei segni, vengono presi gli intervalli positivi o negativi in base a quale fosse il segno della disequazione di partenza.
Per quanto riguarda un prodotto si fa lo stesso procedimento di discussione dei due termini separatamente (stavolta nessuno dei due termini deve rinunciare all'uguale nel caso di uguale nella disequazione principale) con successiva regola dei segni.

P – Perché questa mossa?
Alcune scelte stilistiche nel riportare o nell'eseguire i calcoli potrebbero non essere immediate, in questa sezione vengono spiegate.

P.1 – Ampiezza degli angoli
All'interno del seguente elaborato l'ampiezza degli angoli verrà misurata sempre in radianti, sia per una questione di comodità che di continuità con tutto l'elaborato.

P.2 – L'elaborato è in italiano! Perché sin() e non sen()?
Questa scelta è relativa al programma utilizzato per la composizione dell'elaborato. Nel momento in cui si segna il seno come sen() al posto di usare sin() questo viene considerato come un testo qualunque all'interno della formula, esempio:
$\sin()$, $sen()$
Per evitare dunque il fastidio che provocherebbe vedere $\cos(x)+sen(x)$ in cui *sen* è in "italico" (inteso come font del carattere), verrà usato sin.

P.3 – Equazione dimensionale
Nel momento in cui si va a calcolare l'arco di circonferenza stiamo andando a calcolarci una misura in metri. Ora, se in una operazione normale è possibile evitare di mettere l'uno per le moltiplicazioni qui lo inserisco perché è importante per far trovare la corretta unità di misura alla fine delle operazioni. Altrimenti ci ritroveremmo con una lunghezza adimensionata.