ESAME DI STATO 2020 - PROVA DI MATEMATICA E FISICA

Il luogo geometrico di equazione $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8x = 0$ individua nel piano xoy la sezione di una superficie gaussiana γ. La superficie gaussiana, vedi figura 1, è ottenuta dalla rotazione di 180° del luogo intorno all'asse delle ascisse e le sue dimensioni sono espresse in metri.

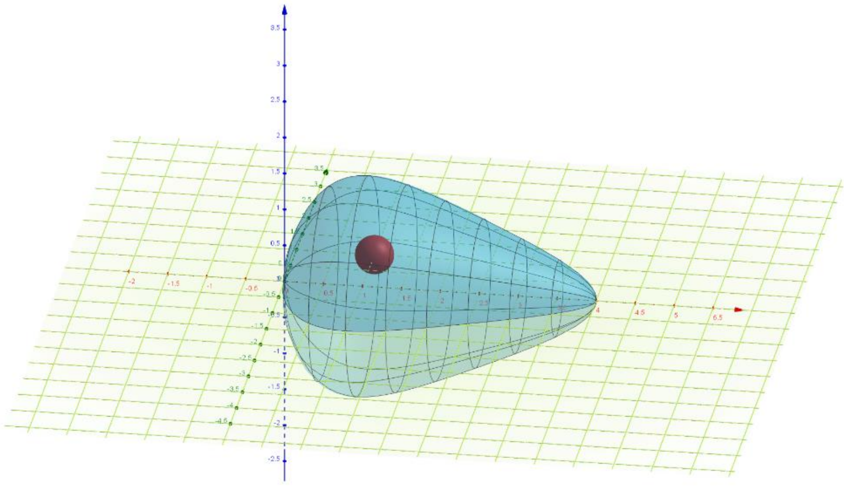


Figura 1

a. Esplicita l'equazione del luogo rispetto alla variabile y, chiama $g(x)$ la funzione polidroma così ottenuta, disegnala servendoti di una calcoltrice grafica e studia le peculiarità della funzione $y = g(x)$, con $g(x) \geq 0$.

b. Verifica se sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo di esistenza della funzione. Presenta il teorema di Rolle come caso particolare del Teorema di Lagrange.

c. Giustifica la seguente affermazione: la funzione $g(x)$ non è derivabile agli estremi dell'intervallo di definizione.

d. Si consideri la sfera di centro $C = (1,1,0)$ e raggio $r = \frac{1}{4}$. Indicata con $d(x)$ la funzione che esprime il luogo delle distanze dei punti della curva dal centro della sfera, si ottiene la distanza minima per $x = 1$ e la distanza massima per $x = 4$. Determina $d(1)$ e assicurati così che la sfera è interna alla superficie gaussiana.

e. Verifica che il volume della sfera occupa meno dello $0{,}5\%$ del volume racchiuso nella superficie γ.

f. Spiega perché il flusso del campo elettrico è massimo in corrispondenza del punto $M = (1, \sqrt{2}, 0)$ presente sulla superficie.

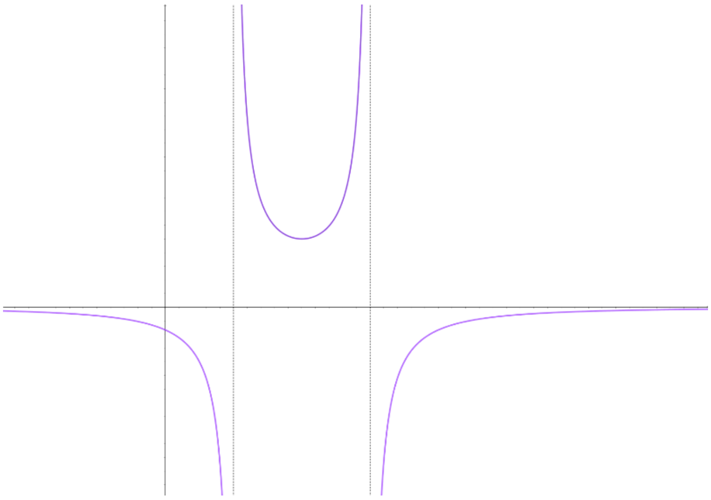
g. Sapendo che una carica di $250\ C$ è distribuita uniformemente sulla sfera, calcola l'intensità del campo elettrico nel punto più vicino e nel punto più remoto della curva.

ESAME DI STATO 2020 - PROVA DI MATEMATICA E FISICA

Data la famiglia di funzioni algebriche

$$f(x) = -\frac{1}{x^2+ax+b},$$

con a e $b \in \mathbb{R}$.



a) Stabilisci quale relazione deve sussistere tra a e b perché la funzione data sia continua in tutto $\mathbb{R}$.

b) Determina per quali valori di a e b la funzione ha come asintoto la retta $x = 1$ e ammette un punto di estremo relativo in $x = 2$.

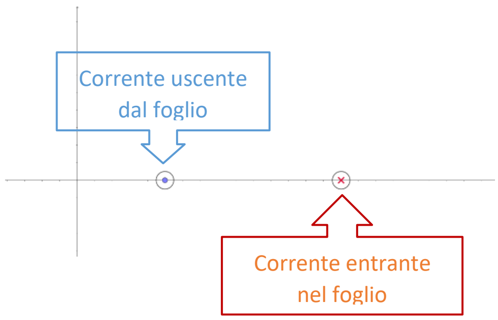
Per i valori di a e b determinati, il grafico qualitativo di $f(x)$ è rappresentato in figura.

c) Stabilisci se il teorema di Rolle è applicabile alla funzione nell'intervallo $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$ e successivamente enuncia e dimostra il teorema.

d) Traccia il grafico qualitativo della funzione derivata $f'(x)$. Fornisci un'ampia giustificazione delle operazioni eseguite.

e) Determina l'area della regione piana R individuata dalla funzione e dalle rette $x = -2$ e $x = 0$, illustrando il metodo di integrazione seguito.

Due fili rettilinei attraversati da una corrente di uguale intensità sono paralleli tra loro e perpendicolari al piano del foglio (vedi grafico). La funzione $B(x) = h \cdot \left(\frac{1}{3-x} + \frac{1}{x-1}\right)$ rappresenta l'intensità del campo magnetico $\vec{B}$, prodotto dalle correnti di intensità i, in un punto P di coordinate $(x, 0)$, con $1 < x < 3$, mentre $h = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot i \cdot 10^7$.



f) Determina il valore di i per cui $B(x) = f(x)$.

g) Sostituito il valore trovato per h, individua il punto sull'asse x in cui $B(x) = 1$ e verifica che nello stesso punto l'intensità del campo magnetico è minima.

h) Descrivi, a partire dalla scoperta di Ørsted, il campo magnetico generato da un filo attraversato da corrente.

i) Sapendo che i fili hanno stessa lunghezza rappresenta vettorialmente e descrivi la forza magnetica prodotta da ognuno dei fili sull'altro.

ESAME DI STATO 2020 - PROVA DI MATEMATICA E FISICA

Risolvi il seguente problema

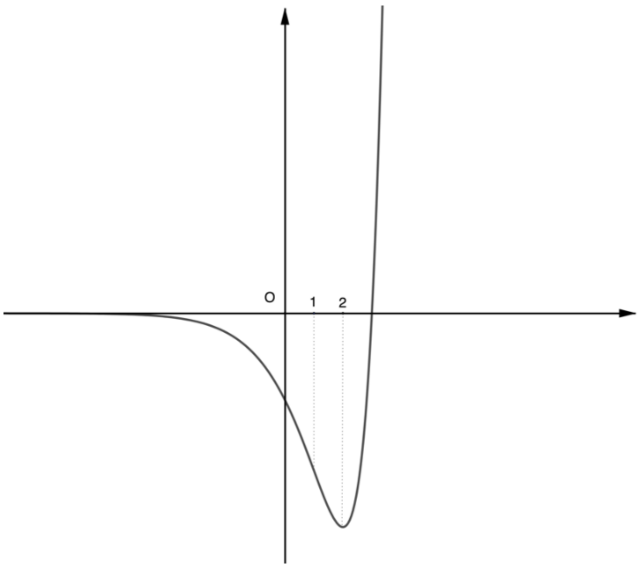
Sia f una famiglia di funzioni trascendenti espressa dall'equazione:

$$f(x) = (x - a)e^{bx} ,$$

con a e b $\in \mathbb{R}$.
Il grafico di una delle funzioni è riportato in figura e ha le seguenti caratteristiche:

a) un minimo relativo nel punto di ascissa 2;
b) un flesso obliquo nel punto di ascissa 1.

In base a queste informazioni, determina il valore dei parametri a e b.



Per i valori di a e b determinati:

c) Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel suo punto di flesso.

d) Traccia il grafico qualitativo della funzione derivata $f'(x)$. Fornisci un'ampia giustificazione delle operazioni eseguite.

e) Disegna il grafico della funzione $|f(x)|$, analizza i suoi punti di non derivabilità.

f) Determina l'area della regione piana R individuata dalla funzione $f(x)$ e dalle rette $x = 0$ e $x = 3$, illustrando il metodo di integrazione seguito.

g) Definisci la derivata prima di una funzione e illustra il suo significato geometrico.
Fornisci un esempio di funzione non derivabile in un punto.
Esamina il legame tra continuità e derivabilità. Classifica i punti di non derivabilità.

Una spira di rame, di forma quadrata ha una superficie di 25 dm^2. La resistenza della spira è pari a $R = 0{,}5\ \Omega$, è ferma in un'area attraversata da un campo magnetico di intensità variabile perpendicolare al piano della spira. Consideriamo positivo il campo magnetico con le linee uscenti dal piano della spira e orientate verso l'alto. L'equazione sarà $B(t) = (t - a)e^{bt}$, con a e b già precedentemente determinati. Pertanto l'asse orizzontale riporterà il tempo in secondi per $t \in [0, 4]$, mentre l'asse verticale esprimerà in Gauss il valore del campo magnetico. Il segno della funzione $B(t)$, stabilisce il verso del vettore campo $\vec{B}$.

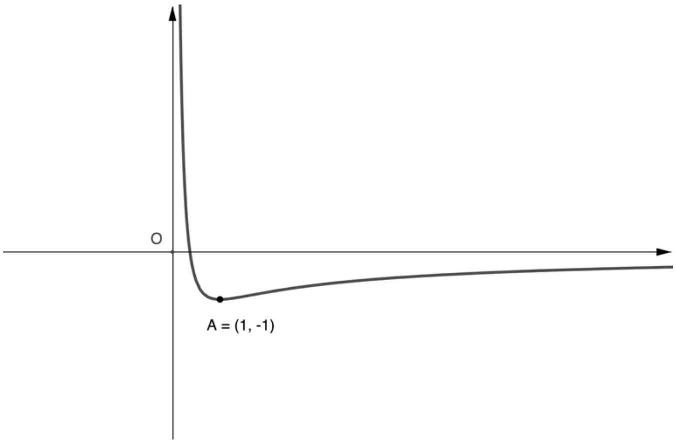
h) Individua l'istante in cui il verso del campo $\vec{B}$, cambia.
i) Nei quattro secondi di osservazione del fenomeno fisico si verifica una variazione del campo magnetico. Esponi con opportune argomentazioni le conseguenze di tale variazione attraverso la superficie della spira.
j) Determina e rappresenta l'intensità della corrente che attraversa la spira al variare di t.

ESAME DI STATO 2020 - PROVA DI MATEMATICA E FISICA

Sia f una famiglia di funzioni trascendenti espressa dall'equazione:

$$f(x) = \frac{a \cdot \ln(x) + b}{x},$$

con a e $b \in \mathbb{R}$.



Il grafico di una delle funzioni è riportato in figura. Determina il valore dei parametri a e b, in modo che la curva abbia in (1,-1) un minimo relativo.

Per i valori determinati:

a) Traccia il grafico qualitativo della funzione derivata $f'(x)$ e fornisci un'ampia giustificazione delle operazioni eseguite.

b) Determina l'area della regione piana R individuata dalla funzione $f'(x)$ e dalle rette $x = 1$ e $x = 4$, illustrando il metodo di integrazione seguito.

c) Disegna il grafico della funzione $|f'(x)|$ e analizza i suoi punti di non derivabilità.

d) Enuncia il teorema di Fermat. Spiega se si tratta di una condizione necessaria e/o sufficiente per l'esistenza di un massimo o di un minimo relativo. Aiutati con esempi e controesempi.
Spiega come si determinano i massimi e i minimi relativi con la derivata prima di una funzione.

Supponendo che nel riferimento Oxy le lunghezze siano espresse in metri, considera tre fili conduttori rettilinei di ugual lunghezza, disposti perpendicolarmente al piano xy e passanti per i punti di coordinate $P_1\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{8}\right)$, $P_2\left(2, \frac{1}{8}\right)$, $P_3\left(3, \frac{1}{8}\right)$. I tre fili sono percorsi dalle correnti i_1, i_2 e i_3, con i_2 di intensità 3,0 A e nel verso entrante nel piano ($\otimes$) e i_3 di intensità uguale alla terza parte di quella di i_1.

e) Stabilisci come varia la circuitazione del campo magnetico generato dalle correnti lungo il contorno della regione piana R, a seconda del verso e delle intensità delle correnti.

f) Supponendo di poter avvicinare o allontanare il filo posto in P_1 al filo posto in P_2, stabilisci a quale distanza da P_2 bisogna portare il filo in P_1 e quali versi devono avere le correnti i_1 e i_3, affinché la forza magnetica totale esercitata sul filo in P_2 sia nulla.