Prova scritta di Matematica& Fisica

Problema

Un amperometro misura la tensione su un conduttore collegato ad un circuito. La sezione del conduttore è attraversata da un flusso di cariche elettriche che varia in funzione del tempo secondo la legge:

$$q(t) = 5 \cdot \left[\frac{(at+2)^2}{4t^2+5t+4} + 2\right]$$

Dove $a \in A = \{0,1,2,3\}$, mentre t esprime il tempo in secondi.

a. Stabilire il valore del parametro a sapendo che nell'istante iniziale l'amperometro misura una corrente pari a $3{,}75\ A$.

b. Appurato che la legge che determina il flusso di cariche è equivalente a $q(t) = 10 \cdot \left[\frac{2(t+1)^2}{4t^2+5t+4} + 1\right]$, si individui l'istante in cui l'amperometro misura zero.

c. Verificare che all'istante iniziale e al tendere di t all'infinito transitano $15\ C$ attraverso la sezione del conduttore.

d. Calcolare l'intensità media di corrente nell'intervallo di tempo $[0,2]$ e giustificare la seguente affermazione: "Esiste almeno un istante compreso tra zero e due secondi in cui l'intensità di corrente vale $0{,}5\ A$".

e. Verificare attraverso il calcolo che per $a = 0$, il flusso di cariche nell'intervallo di tempo $[0,+\infty[$ assume valori strettamente decrescenti che vanno da 15 a 10 Coulomb.

Indicatore *(il peso di ogni esercizio sarà composto dalle seguenti percentuali)*	**% max per ogni ind.**
Comprendere Analizzare la situazione problematica. Identificare i dati ed interpretarli. Effettuare gli eventuali collegamenti e adoperare i codici grafico-simbolici necessari.	25%
Individuare Conoscere i concetti matematici utili alla soluzione. Analizzare possibili strategie risolutive ed individuare la strategia più adatta.	30%
Sviluppare il processo risolutivo Risolvere la situazione problematica in maniera coerente, completa e corretta, applicando le regole ed eseguendo i calcoli necessari.	25%
Argomentare Commentare e giustificare opportunamente la scelta della strategia risolutiva, i passaggi fondamentali del processo esecutivo e la coerenza dei risultati al contesto del problema.	20%

punto	a	b	c	d	e
Peso / 20	**5**	**5**	**4**	**2**	**4**
Punti da 1 a 10					

Voto: ………………….

STUDENTE: ……………………………………………………………………………… classi: V

Soluzione del problema

a) Dato che $i(0) = 3,75 \Rightarrow i(0) = \frac{15}{4}$

$$i(t) = q'(t)$$

$$i(t) = 5\left[\frac{2a(at+2)(4t^2+5t+4) - (at+2)^2(8t+5)}{(4t^2+5t+4)^2}\right] \Rightarrow$$

$$i(0) = 5\left[\frac{2a(2)(4) - (2)^2 \cdot (5)}{(4)^2}\right] \Rightarrow 5\left[\frac{16a-20}{16}\right] = \frac{15}{4}$$

$$\frac{16a-20}{16} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\cancel{4}(4a-5)}{\cancel{16}\,4} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4a-5=3$$

$$4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

Pertanto la funzione $q(t)$ diventa:

$$q(t) = 5\left[\frac{(2t+2)^2}{4t^2+5t+4} + 2\right] \Rightarrow q(t) = 5\left[\frac{4(t+1)^2}{4t^2+5t+4} + 2\right] \text{ da cui}$$

$$q(t) = 10\left[\frac{2(t+1)^2}{4t^2+5t+4} + 1\right];$$

b) Trovare l'istante in cui l'amperometro segna zero!

$i(t) = 0$ Riconsideriamo la derivata ponendo $a = 2$

$$i(t) = 5\left[\frac{4(2t+2)(4t^2+5t+4) - (2t+2)^2(8t+5)}{(4t^2+5t+4)^2}\right] \Rightarrow i(t) = 5\left[\frac{32t^3+40t^2+32t+32t^2+40t+32+}{(4t^2+5t+4)^2}\right.$$

$$\frac{-(4t^2+8t+4)(8t+5)}{}$$

$$i(t) = 5\left[\frac{\cancel{32t^3}+72t^2+72t+32-\cancel{32t^3}-20t^2-64t^2-40t-32t-20}{(4t^2+5t+4)^2}\right] \Rightarrow i(t) = 0$$

$t = -1$ non accettabile

$$-12t^2+12=0 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1$$

l'amperometro misura zero dopo 1 secondo.

c) Verificare che $\underline{q(0) = 15\ C}$ e $\underline{\lim_{t \to +\infty} 10\left(\frac{2(t+1)^2}{4t^2+5t+4} + 1\right) = 15\ C}$

$$q(0) = 10\left(\frac{2(0+1)^2}{4\cdot 0 + 5\cdot 0 + 4} + 1\right) \Rightarrow q(0) = 10\left(\frac{2}{4} + 1\right)$$

$$q(0) = 10\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow q(0) = 15\ C$$

$$\lim_{t \to +\infty} 10\left(\frac{2(t+1)^2}{4t^2+5t+4} + 1\right) = 10\cdot\left(\lim_{t\to\infty}\left(\frac{2t^2+4t+2}{4t^2+5t+4}\right) + 1\right) =$$

$$= 10\cdot\left(\frac{2}{4} + 1\right) = 15\ C.$$ Condizione soddisfatta.

d) $$i_m = \frac{\Delta q}{\Delta t} \Rightarrow i_m = \frac{q(2) - q(0)}{2 - 0} \Rightarrow i_m = \frac{10\left(\frac{\cancel{18}^{3}}{\cancel{30}_{5}} + 1\right) - 10\left(\frac{1}{2} + 1\right)}{2}$$

$$i_m = \frac{16 - 15}{2} \qquad i_m = 0{,}5\ A;$$

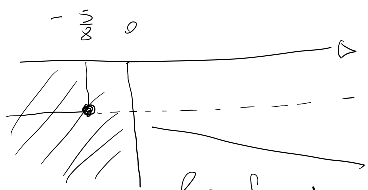
Trattandosi di una funzione continua e derivabile in $\mathbb{R}^+$ lo sarà, a maggior ragione in $[0;2]$, pertanto per il teorema di Lagrange $\exists\ c \in (0;2) : f'(c) = 0{,}5\ A$.

e) La funzione per $a = 0$ diventa:

$q(t) = 10\left[\frac{2}{4t^2+5t+4} + 1\right]$ per verificare che il flusso è strettamente decrescente si studia la monotonia in $\mathbb{R}^+$

$$q'(t) = 10\left[-\frac{2(8t+5)}{(4t^2+5t+4)^2}\right] \qquad q'(t) \geq 0 \Rightarrow -2(8t+5) \geq 0$$

il denominatore è sempre positivo! $\quad 8t+5 \leq 0 \quad t < -\frac{5}{8}$



la funzione in $\mathbb{R}^+$ è strettamente decrescente

$q(0) = 10\left(\frac{2}{4}+1\right) \Rightarrow \underline{q(0) = 15\ C}$ $\qquad \lim_{t\to+\infty} 10\left[\frac{2}{4t^2+5t+4} + 1\right] = 10\left(\lim_{t\to+\infty}\frac{2}{4t^2+5t+4}\right) + 10 = \underline{10\ C}$