Asintoti orizzontali

Comportamento della curva agli estremi

Tipologia: attività di laboratorio
Autore: Luigi Boscaino
Destinatari: Classi quinte

Con il contributo di Excel si valuta il comportamento della funzione esponenziale $y = \frac{1}{1+e^x}$, sia per valori positivi, che negativi. Lo step utilizzato è di una unità, nei due intervalli di interi relativi [1;31] e [-31; -1].

x	*f(x)*	*x*	*f(x)*
-31	1,0000000000000	1	0,2689414213700
-30	0,9999999999999	2	0,1192029220221
-29	0,9999999999997	3	0,0474258731776
-28	0,9999999999993	4	0,0179862099621
-27	0,9999999999981	5	0,0066928509243
-26	0,9999999999949	6	0,0024726231566
-25	0,9999999999861	7	0,0009110511944
-24	0,9999999999622	8	0,0003353501305
-23	0,9999999998974	9	0,0001233945760
-22	0,9999999997211	10	0,0000453978687
-21	0,9999999992417	11	0,0000167014218
-20	0,9999999979388	12	0,0000061441746
-19	0,9999999943972	13	0,0000022603243
-18	0,9999999847700	14	0,0000008315280
-17	0,9999999586006	15	0,0000003059022
-16	0,9999998874648	16	0,0000001125352
-15	0,9999996940978	17	0,0000000413994
-14	0,9999991684720	18	0,0000000152300
-13	0,9999977396757	19	0,0000000056028
-12	0,9999938558254	20	0,0000000020612
-11	0,9999832985782	21	0,0000000007583
-10	0,9999546021313	22	0,0000000002789
-9	0,9998766054240	23	0,0000000001026
-8	0,9996646498695	24	0,0000000000378
-7	0,9990889488056	25	0,0000000000139
-6	0,9975273768434	26	0,0000000000051
-5	0,9933071490757	27	0,0000000000019
-4	0,9820137900379	28	0,0000000000007
-3	0,9525741268224	29	0,0000000000003
-2	0,8807970779779	30	0,0000000000001
-1	0,7310585786300	31	0,0000000000000

Come si evince dalle colonne di *f(x)*, man mano che i valori di *x* si allontanano da zero, sia tra i negativi che tra i positivi, la funzione mantiene valori molto piccoli. In particolare, se *x* assume valori negativi, *f(x)* si avvicina per difetto al valore 1, mentre al crescere di *x* tra i numeri postivi *f(x)* tende a zero per eccesso. La funzione ha il denominatore diverso da zero per ogni *x, quindi è definita in tutto R.* Inoltre il segno della funzione è sempre positivo.

Verifichiamo il limite a più infinito

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0$$

Asserire che il limite è uguale a zero significa dire che:

$$\forall\varepsilon > 0 \; \exists \, c \in \mathbb{R}: \forall x > c, \qquad \frac{1}{1+e^x} < \varepsilon$$

La funzione in questo caso non è stata posta in valore assoluto in quanto sempre positiva.

$$\frac{1}{1+e^x} - \varepsilon < 0 \;\Rightarrow\; 1 - \varepsilon - \varepsilon \cdot e^x < 0$$

Il denominatore $(1 + e^x)$ ha segno positivo per ogni x, pertanto non si discute. Quindi

$$-\varepsilon \cdot e^x < \varepsilon - 1 \;\; da\, cui \;\; \varepsilon \cdot e^x > 1 - \varepsilon$$

Risolvendo rispetto ad *x*

$$e^x > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \quad ovvero \quad x > ln\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)$$

In definitiva esiste sempre un intervallo sinistro di $+\infty$, in cui la funzione è minore di

$$\varepsilon: \;\left]ln\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right);\; +\infty\right[$$