Teoremi del calcolo differenziale

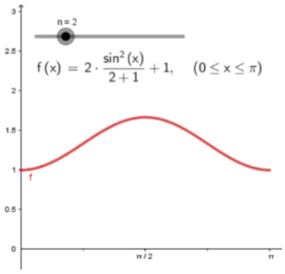
Ambito: Analisi matematica
Autore: Luigi Boscaino
Destinatari: classi V

TEORIA.

TEOREMA DI ROLLE (QRcode per video della dimostrazione)

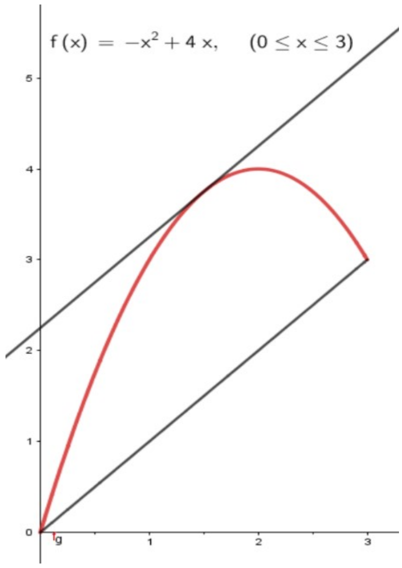
Se la funzione f è continua nell'intervallo [a, b] e derivabile in (a, b) e inoltre $f(a) = f(b)$, allora esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$.

Video della dimostrazione



Il motivo lo si immagina graficamente: infatti essendo $f(a) = f(b)$ si ha che o la funzione è una costante e vale $f(x) = f(a) = f(b)\ \forall x$, (da cui tutti i punti hanno derivata nulla), oppure la funzione deve crescere e poi decrescere o viceversa (anche più volte). Pertanto esisteranno punti di massimo o di minimo dove si annulla la derivata prima.

TEOREMA DI LAGRANGE (QRcode per video della dimostrazione)



Se la funzione f è continua nell'intervallo [a, b] e derivabile in (a, b), allora esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Video della dimostrazione

E' un caso particolare del teorema di Cauchy dove la funzione g è la funzione identica $g(x) = x$.

TEOREMA DI CAUCHY

Se f e g sono continue in [a, b], derivabili in (a, b) e, inoltre, $g'(x) \neq 0\ \forall\, x \in (a, b)$, allora esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che:

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Basta applicare il teorema di Rolle alla funzione:

$$F(x) = f(x) - f(a) - (g(x) - g(a)) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

LABORATORIO.

TEOREMA DI ROLLE

1. Data la funzione: $f(x) = x - x^3$,

mostrare che verifica il teorema di Rolle nell'intervallo chiuso e limitato [−1, 0].

2. Verificare che per la funzione $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$,
non è possibile applicare il teorema di Rolle nell'intervallo [0, 4].

3. Verificare che la funzione $f(x) = tg(x)$, non soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle

nell'intervallo [0, π].

4. La funzione: $f(x) = \frac{x^2-4x}{x-2}$, verifica il teorema di Rolle nell'intervallo [0, 4]?

5. Verificare il teorema di Rolle per la funzione y = cos2(x) nell'intervallo [-π ⁄ 4; + π ⁄ 4].

TEOREMA DI CAUCHY

1. Verificare il teorema di Cauchy per le funzioni $f(x) = e^{x^2+1}$ e $g(x) = x^2 + 2$ in [0,1].

TEOREMA DI LAGRANGE

1. Assegnata la funzione: $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$, mostrare che essa verifica il teorema di Lagrange

nell'intervallo [−1, 1] e trovare il punto *c.*

2. Verificare il teorema di Lagrange per $f(x) = x^2 + |x-1|$, in [0,2].

Verso l'Esame di Stato – calcolo differenziale

Quesito Esame di stato 2001

Sia f (x) una funzione reale di variabile reale, derivabile in un intervallo [a, b] e tale che, per ogni x di tale intervallo, risulti $f'(x) = 0$. Dimostrare che $f(x)$ è costante in quell'intervallo.

Quesito Esame di stato 2002

La funzione reale di variabile reale $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato [1; 3] e derivabile nell'intervallo aperto]1, 3[. Si sa che $f(1) = 1$ e inoltre $0 \leq f'(x) \leq 2$ per ogni x dell'intervallo]1; 3[. Spiegare in maniera esauriente perché risulta $1 \leq f(x) \leq 5$.

Quesito Esame di stato 2004

Verificate che le due funzioni $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = 3\log(\mathrm{x})$ e $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \log(2\mathrm{x})^3$ hanno la stessa derivata. Quale giustificazione ne date?

Quesito Esame di stato 2005

Determinare il dominio di derivabilità della funzione $f(x) = |x^2 - 1|$ (vedi rappresentazione Geogebra)

Quesito Esame di stato 2006

La funzione $f(x) = x^3 - x^2$ soddisfa le condizioni del teorema di Lagrange nell'intervallo [0; 1]? Se sì, trova il punto c che compare nella formula:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Verifica del teorema di Rolle

Verificare il teorema di Rolle per la funzione $y = \cos^2(x)$ nell'intervallo $[-\pi/4; +\pi/4]$.

Problema Esame di Stato 2002

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva k di equazione $f(x) = \frac{x^2+2}{x^3+2}$.

a) Determinare per quali valori di x essa è situata nel semipiano $y \geq 0$ e per quali nel semipiano $y < 0$.

b) Trovare l'equazione della parabola passante per l'origine O degli assi e avente l'asse di simmetria parallelo all'asse y, sapendo che essa incide ortogonalmente la curva k nel punto di ascissa -1.

c) Stabilire se la retta tangente alla curva k nel punto di ascissa -1 ha in comune con k altri punti oltre a quello di tangenza.

d) Determinare in quanti punti la curva k ha per tangente una retta parallela all'asse x.

e) **Enunciare il teorema di Lagrange e dire se sono soddisfatte le condizioni perché esso si possa applicare alla funzione $f(x)$ assegnata, relativamente all'intervallo $-\sqrt{2} \leq x \leq 0$.**