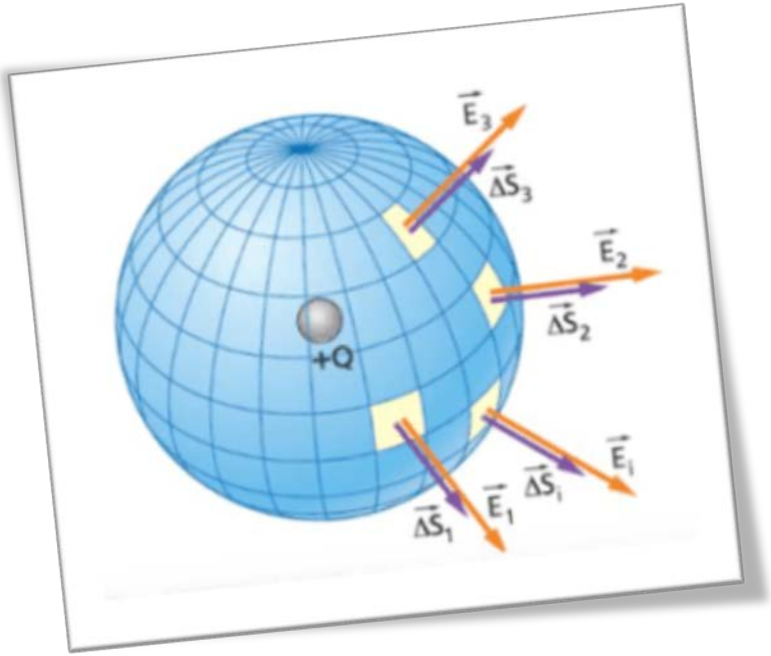


$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

Carl Friedrich Gauss

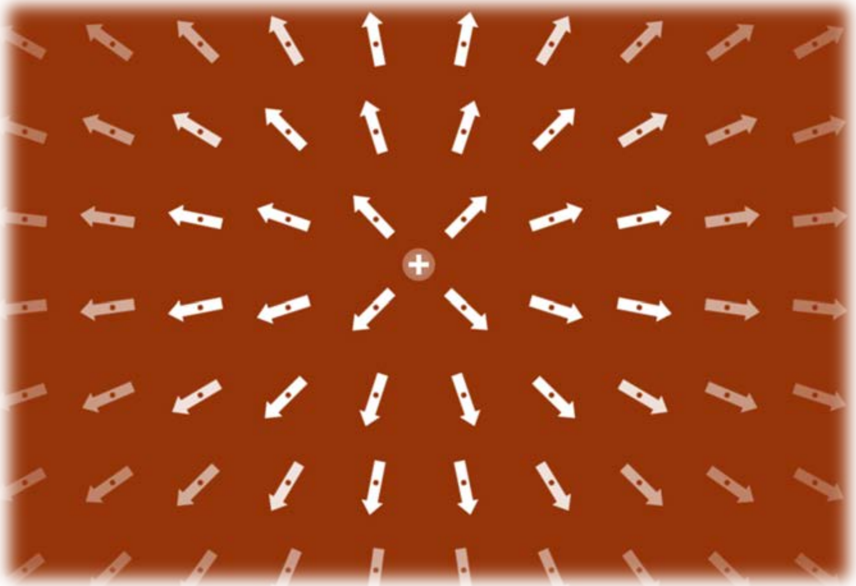
Il teorema di Gauss

TRATTO DA:

I PROBLEMI DELLA FISICA- Cutnell, Johnson, Young, Standler – Zanichelli editore

Integrazioni e LO a cura del docente

Il Flusso del campo elettrico



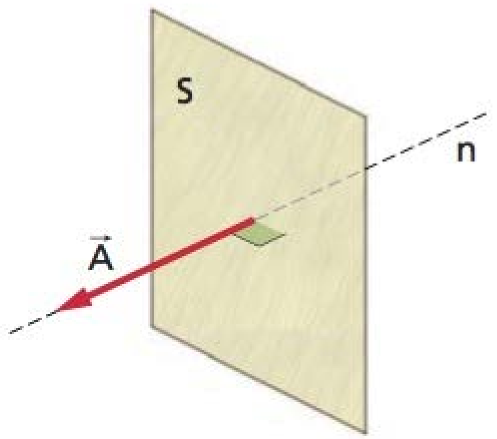
In ogni punto dello spazio attorno a una carica è definito un vettore campo elettrico. L’insieme di questi vettori forma un campo vettoriale, che contiene l’informazione relativa alla carica che l’ha creato.

Dal campo elettrico deriva il concetto di flusso elettrico attraverso una superficie. La descrizione e lo studio del flusso e le importanti conseguenze da esso derivate hanno un protagonista assoluto:

Carl Friedrich Gauss

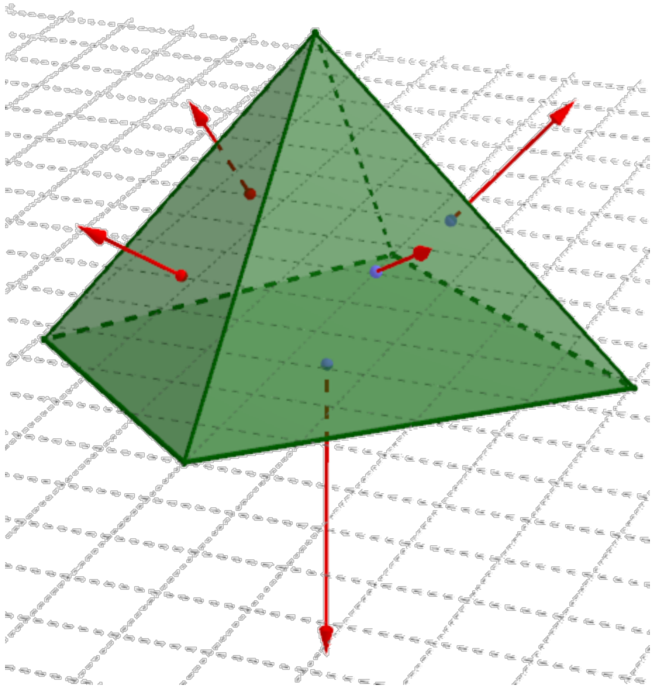
Il vettore area

Consideriamo una piccola superficie piana S di area A. Si definisce vettore area $\vec{A}$, un vettore con modulo uguale all'area A della superficie e direzione perpendicolare alla superficie.



Superficie aperta ⇒ verso arbitrario

Superficie chiusa ⇒ verso uscente



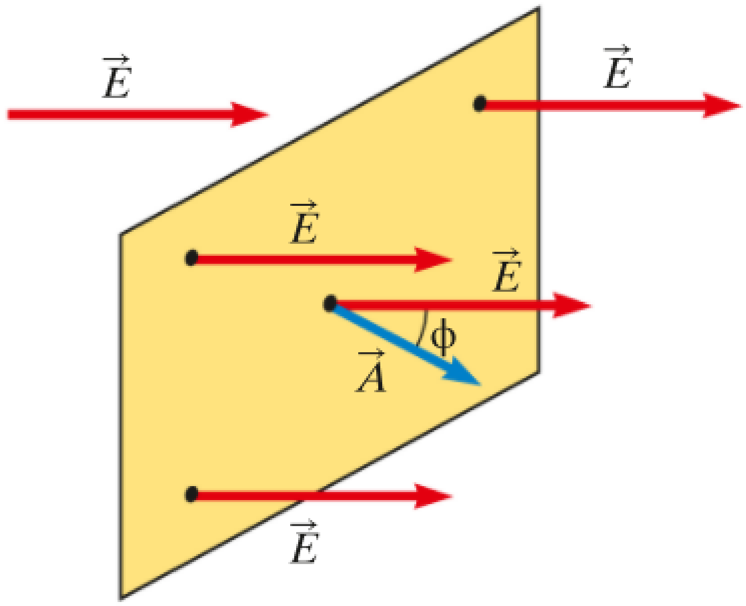
Vedi simulazione Geogebra

Definizione di flusso del campo elettrico

Quando S è immersa in un campo elettrico, in ogni suo punto è definito un vettore $\vec{E}$. Se il campo elettrico è uniforme, si definisce flusso di $\vec{E}$ attraverso la superficie S **la grandezza scalare**:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{A} = E \cos\phi A$$

Unità di misura: $N \cdot m^2/C$



Vedi simulazione Geogebra

Superfici chiuse

In ciascuna regione il flusso del campo elettrico si calcola mediante la formula

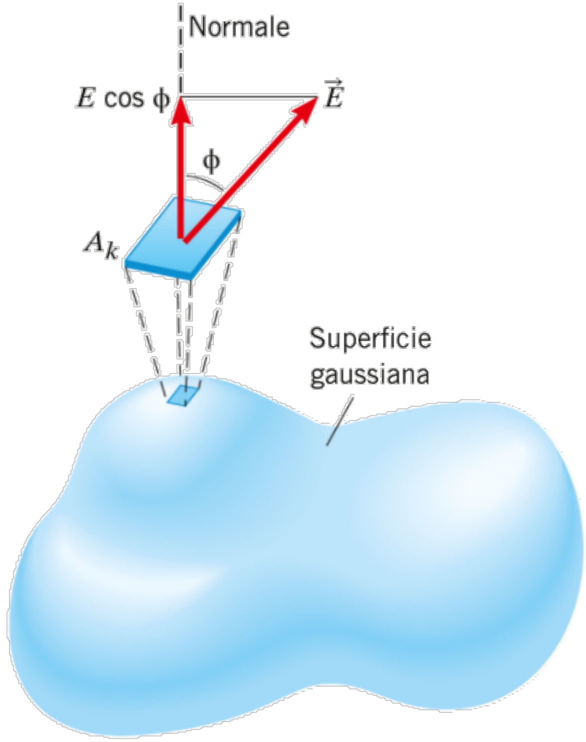
$$\Phi_S(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{A} = E \cos\phi A$$

per esempio, attraverso la regione k-esima presente in figura

$$\Phi(\vec{E}) = \vec{E}_k \cdot \vec{A}_k = E_k \cos\phi_k A_k$$

Sommando tutte le regioni in cui viene divisa la superficie, si ha:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \sum_k \vec{E}_k \cdot \vec{A}_k$$



Il teorema di Gauss

Il flusso $\Phi_S(\vec{E})$ del campo elettrico attraverso una superficie gaussiana è uguale al rapporto fra la carica totale Q racchiusa nella superficie e la costante dielettrica del vuoto ε_0:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Il flusso del campo elettrico non dipende dalla forma e dalle dimensioni della superficie gaussiana scelta, ma solo dalla carica totale racchiusa in essa

Teorema di Gauss e legge di Coulomb

Poiché il flusso non dipende dalla forma della superficie, scegliamo una superficie che rispecchia la simmetria della carica e del campo che essa genera: una sfera di raggio r centrata sulla carica

Il flusso totale sulla superficie è dato dalla somma

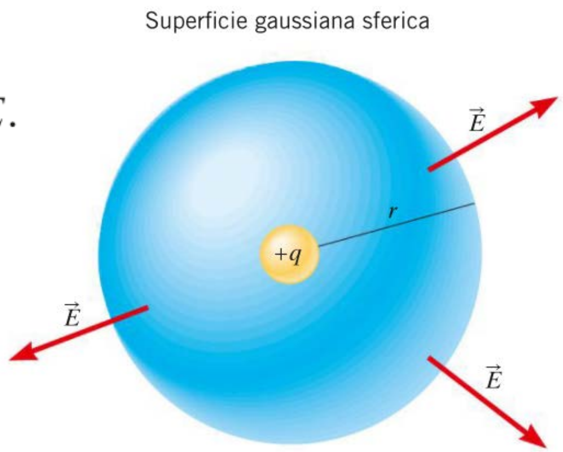
$$\Phi_S(\vec{E}) = \vec{E}_1 \cdot \vec{A}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{A}_2 + \ldots = E_1 A_1 + E_2 A_2 + \ldots = \sum_k \vec{E}_k \cdot \vec{A}_k$$

Il campo $\vec{E}$ ha la stessa intensità in tutti i punti della superficie: $E_1 = E_2 = \ldots = E$. Possiamo quindi raccogliere a fattor comune E:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \sum_k E A_k = E \sum_k A_k$$

Dato che la somma delle regioni corrisponde alla superficie della sfera si può scrivere:

$$\sum_k A_k = 4\pi r^2$$



Teorema di Gauss e legge di Coulomb

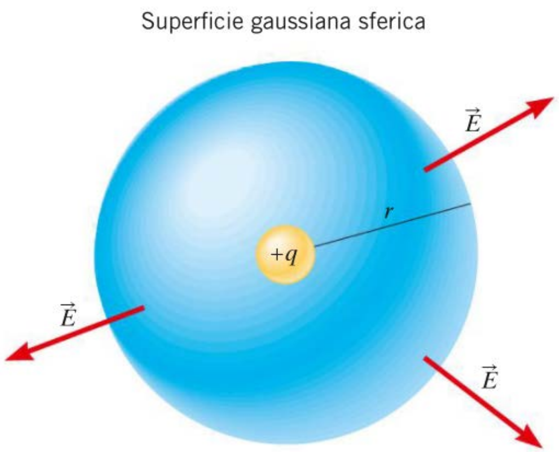
Da cui otteniamo due relazioni: $\Phi(\vec{E}) = E \cdot 4\pi r^2$ ....e $\Phi(\vec{E}) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$,

Eguagliando si ottiene:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Da cui

$$E = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{Q}{\varepsilon_0}$$



Considerando una carica di prova q, esterna alla sfera, si può verificare la corrispondenza con la legge di Coulomb.

$$F = q \cdot E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q \cdot Q}{r^2}$$