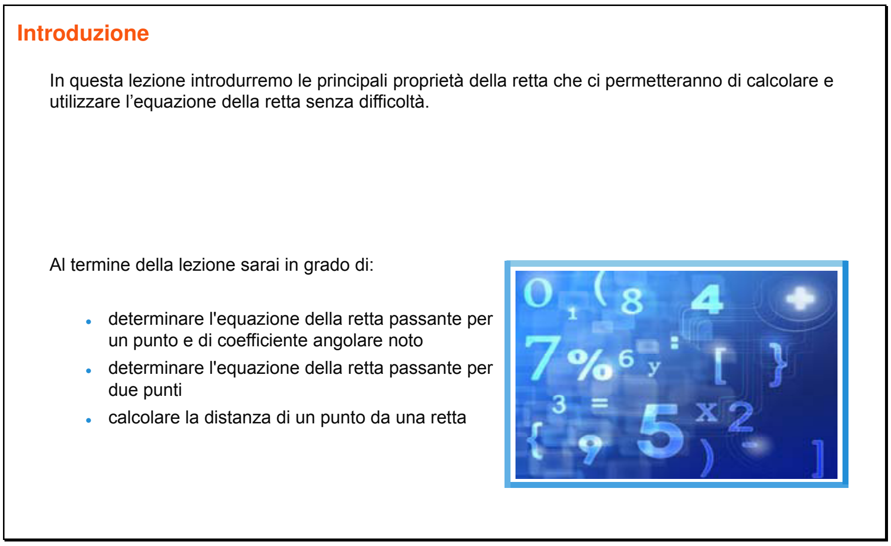
Matematica

Anno 3

Calcolo dell'equazione della retta



In questa lezione introdurremo le principali proprietà della retta che ci permetteranno di calcolare e utilizzare l'equazione della retta senza difficoltà.

Al termine della lezione sarai in grado di:

- determinare l'equazione della retta passante per un punto e di coefficiente angolare noto
- determinare l'equazione della retta passante per due punti e
- calcolare la distanza di un punto da una retta.

La condizione di passaggio per un punto

In geometria analitica è necessario prestare molta attenzione alle **condizioni** espresse dai testi dei problemi, in modo da saperle tradurre in **equazioni**.

Esaminiamo le **condizioni** di:
- passaggio per un punto
- appartenenza di un punto a un luogo geometrico

Si esprimono con:
- sostituzione delle coordinate del punto nell'equazione del luogo geometrico

Esempio:

- Per quale valore di k il luogo geometrico $x^2 + ky - 2 = 0$ **passa per** il punto $P(2,-1)$?

Basta sostituire le coordinate del punto nell'equazione: $2^2 + k(-1) - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 2$

- Per quale valore di a il punto $P(a,3a)$ **appartiene al** luogo geometrico $x^2 + \frac{1}{9}y^2 - 2 = 0$?

Anche qui basta sostituire le coordinate del punto nell'equazione: $a^2 + \frac{1}{9}(3a)^2 - 2 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$

In geometria analitica è necessario prestare molta attenzione alle condizioni espresse dai testi dei problemi, in modo da saperle tradurre in equazioni.

Esaminiamo le condizioni che nei testi sono espresse come passaggio per un punto o appartenenza di un punto a un luogo geometrico.

Queste condizioni si esprimono mediante la sostituzione delle coordinate del punto nell'equazione del luogo geometrico, con la richiesta che esse la soddisfino.

Per esempio, per quale valore di k il luogo geometrico espresso dall'equazione x^2+ky-2 passa per il punto $P(2;-1)$?

Basta sostituire le coordinate del punto nell'equazione e si ottiene $k=2$.

Analogamente, per quale valore di a il punto $P(a;3a)$ appartiene all'altro luogo geometrico espresso dall'equazione $x^2 + \frac{1}{9}y^2 - 2 = 0$?

Anche qui basta sostituire le coordinate del punto nell'equazione e si ottengono due valori ammissibili per a, cioè 1 e -1.

Retta passante per un punto con coefficiente angolare assegnato

Vediamo come applicare quanto appreso al **calcolo** dell'**equazione** di una **retta**.
Supponiamo siano noti:
- un **punto** della retta;
- il suo **coefficiente angolare**.

Come si procede? Stiamo cercando un'equazione del tipo $y=mx+q$.
- m è noto
- il valore di q si ottiene imponendo il passaggio per il punto.

Esempio:

Trovare la retta di coefficiente angolare $m=3$ passante per il punto $A(-1,2)$.

Cerchiamo una retta del tipo $y=mx+q$ dove $m=3$
L'equazione della retta quindi è della forma: $y=3x+q$
La retta, inoltre, passa per A: $2=3(-1)+q \quad \Rightarrow \quad q=5$
La retta cercata ha quindi equazione: $y=3x+5$

Vediamo come applicare quanto appreso al calcolo dell'equazione di una retta. Supponiamo siano noti un punto di passaggio della retta e il suo coefficiente angolare. Come dobbiamo procedere? Stiamo cercando un'equazione del tipo $y=mx+q$.

- m è noto;
- il valore di q si ottiene imponendo il passaggio per il punto.

Per esempio, per trovare la retta di coefficiente angolare $m=3$ passante per il punto $A(-1;2)$, cerchiamo una retta del tipo $y=mx+q$ dove $m=3$.

L'equazione della retta quindi è della forma: $y=3x+q$. La retta, inoltre, passa per A e sostituendo le coordinate del punto nell'equazione si ottiene $q=5$. La retta cercata ha quindi equazione: $y=3x+5$.

Retta passante per due punti

Un altro modo per definire una retta è **assegnare due punti** che la determinino. Infatti, per due punti passa una e una sola retta.

Cercando sempre un'equazione del tipo $y=mx+q$, si dovranno **porre a sistema** le due condizioni di **passaggio per i punti** assegnati.

Esempio:

Trovare la retta passante per i punti $A(1,1)$ e $B(3,5)$

Cercando una retta del tipo $y=mx+q$ le **condizioni di passaggio** per i punti saranno espresse da:

- $1=m+q$
- $5=3m+q$

Mettiamo a **sistema** le due condizioni e troviamo i valori di m e q:

$$\begin{cases} m+q=1 \\ 3m+q=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q=1-m \\ 3m+1-m=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q=-1 \\ m=2 \end{cases}$$

Allora la retta cercata è: $y=2x-1$

In questa pagina vedremo un altro modo per definire una retta: assegnare due punti che la determinino. Infatti, come ricorderai, per due punti passa una e una sola retta.

Cercando sempre un'equazione del tipo $y=mx+q$, si dovranno porre a sistema le due condizioni di passaggio per i punti stabiliti.

Per esempio, per trovare la retta passante per i punti $A(1;1)$ e $B(3;5)$ cerchiamo una retta del tipo y=mx+q; le condizioni di passaggio per i punti saranno espresse da:

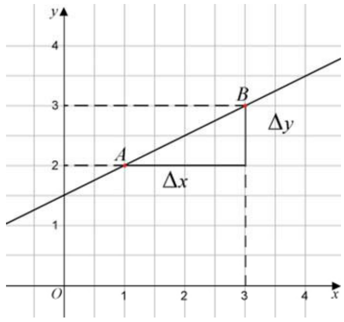
- $1=m+q$;
- $5=3m+q$.

Mettiamo a sistema le due condizioni e troviamo i valori di m e q, ottenendo l'equazione $y=2x-1$.

Coefficiente angolare di una retta per due punti

Considerati due punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, il **coefficiente angolare** della retta passante per A e B è definito come il **rapporto** tra la **differenza** delle **ordinate** dei punti dati e quella delle loro **ascisse**. Quindi si ha che

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$



Esempio:

Il coefficiente angolare della retta passante per i due punti $A(1,2)$ e $B(3,3)$ è uguale a

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{2-3}{1-3} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Definiamo il coefficiente angolare di una retta passante per due punti assegnati *A* e *B*.

Considerati due punti *A* di coordinate (x_A, y_A) e *B* di coordinate (x_B, y_B), il coefficiente angolare dell'unica retta passante per tali punti è dato dal rapporto tra la differenza delle ordinate di *A* e *B* e quella delle loro ascisse. Di conseguenza, $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$.

È importante mantenere lo stesso ordine degli indici delle coordinate, cioè se sottraiamo la *y* di *A* alla *y* di *B* dobbiamo poi sottrarre la *x* di *A* alla *x* di *B*.

Con questo sistema, per esempio, si può calcolare il coefficiente angolare della retta passante per i punti *A*(1,2) e *B*(3,3) disegnati in figura. In questo caso il coefficiente angolare vale 1/2.

Note

Equazione della retta per due punti e per un punto con coefficiente m

Usando la formula del coefficiente angolare introdotta in precedenza, determiniamo l'equazione della retta passante per due punti e quella della retta passante per un punto con coefficiente angolare assegnato.

Dati due punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, otteniamo l'**equazione della retta passante per A e B** imponendo che un terzo punto generico $P(x,y)$ sia allineato con essi:

$$\frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B} \Rightarrow \frac{y-y_A}{y_A-y_B}=\frac{x-x_A}{x_A-x_B} \qquad \boxed{\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{x-x_A}{x_B-x_A}}$$

Dato un punto $A(x_A, y_A)$ ed un numero reale m, otteniamo l'**equazione della retta passante per il punto A** ed avente **coefficiente angolare m**, scrivendo l'equazione del fascio di rette di centro A:

$$\boxed{y-y_A=m(x-x_A)}$$

Utilizzando la formula del coefficiente angolare della retta passante per due punti, appena introdotta, determiniamo l'equazione della retta passante per due punti e quella della retta passante per un punto ed avente il coefficiente angolare assegnato.

Consideriamo innanzitutto due punti *A* e *B* e cerchiamo l'equazione dell'unica retta passante per essi. A tal scopo, consideriamo un generico punto *P* di coordinate (*x*,*y*) e richiediamo che esso sia allineato ai punti *A* e *B*. Ciò equivale a richiedere che il coefficiente della retta passante per *P* e uno dei due punti assegnati, per esempio *A*, e quello della retta passante per *A* e *B* siano uguali tra loro. Utilizzando la formula precedentemente introdotta, otteniamo la seguente equazione: $\frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.

Da essa, con opportuni calcoli, deduciamo l'equazione della retta passante per *A* e *B*, ovvero $(y-y_A)/(y_B-y_A)=(x-x_A)/(x_B-x_A)$.

Consideriamo adesso un unico punto *A* di coordinate (x_A, y_A) ed un numero reale *m*. Per ottenere l'equazione della retta passante per il punto *A* ed avente coefficiente angolare *m*, basta scrivere l'equazione del fascio di rette di centro *A*: $y-y_A=m(x-x_A)$.