Operazioni trascendenti

1. I logaritmi

Tipologia: attività di laboratorio

Autore: Luigi Boscaino

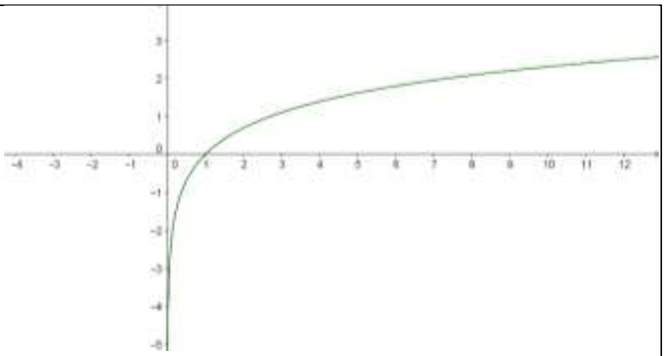
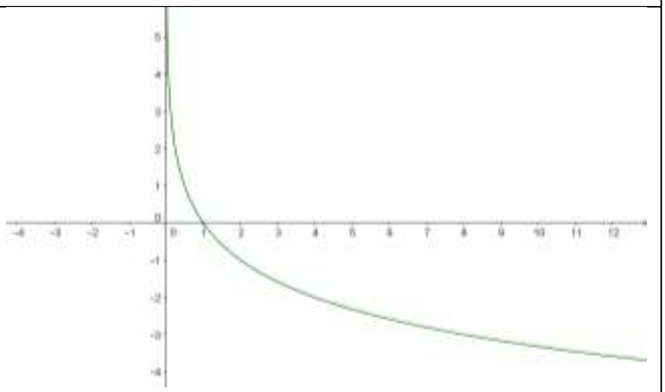
Data: 06/02/2016

Dati due numeri reali positivi a e b, con $b \neq 1$, si chiama logaritmo in base b di a e si scrive $\log_b a$, il numero reale x tale che $b^x = a$, ovvero il logaritmo in base b di argomento a è l'esponente da elevare alla base per ottenere come risultato l'argomento. Ne consegue che il logaritmo di argomento 1 è uguale a zero, qualunque sia la sua base; giacché tutti i numeri elevati a zero danno uno. Così pure, se la base e l'argomento del logaritmo sono uguali, il logaritmo è uguale a uno. RIASSUMIAMO:

$\log_b 1 = 0 \quad \forall b > 0, b \neq 1$	$\log_b b = 1 \quad \forall b > 0, b \neq 1$

I logaritmi di base più comune sono il logaritmo decimale (in base 10, indicati con *Log*) e il logaritmo naturale (in base *e*, indicati con *ln o log*).

Se facciamo variare l'argomento e lo indichiamo con la lettera *x*, al variare di *x* tra i numeri positivi avremo valori reali del logaritmo che indichiamo con y. Si ottiene così una funzione, definita per valori positivi della *x*, che ha un andamento monotòno. La curva che rappresenta graficamente il logaritmo può essere crescente o decrescente a seconda del valore assunto alla base del logaritmo. Se la base è un numero maggiore di uno (*b>1*), la curva ha andamento monotòno crescente; se la base è compresa tra zero ed uno (0<*b<1*), la curva ha andamento monotono decrescente. RIASSUMIAMO:

$y = \log_b x$ *b>1*	
$y = \log_b x$ 0<*b<1*	

I Teoremi

- ✓ L'esponente dell'argomento di un logaritmo diventa coefficiente del logaritmo.
- ✓ La somma di logaritmi con la stessa base si può esprimere come il logaritmo che ha per base la stessa base e per argomento il prodotto degli argomenti.
- ✓ La differenza di logaritmi con la stessa base si trasforma nel logaritmo che ha per base la stessa base e per argomento l rapporto degli argomenti.
- ✓ Spesso, per ottenere omogeneità nelle espressioni o per risolvere i logaritmi con la calcolatrice (ricordiamo che la calcolatrice scientifica riconosce solo le basi comuni: 10 ed e), si ricorre al cambiamento di base.

RIASSUMIAMO:

Nomenclatura	formalizzazione	esempio
Teorema della potenza	$\log_b a^k = k \cdot \log_b a$	$\log_2 5^4 = 4 \cdot \log_2 5$
Teorema del prodotto	$\log_b a + \log_b c = \log_b a \cdot c$	$\log_3 4 + \log_3 5 = \log_3 20$
Teorema del rapporto	$\log_b a - \log_b c = \log_b \frac{a}{c}$	$\log_2 21 - \log_2 7 = \log_2 \frac{21}{7} = \log_2 3$
Formula del cambiamento di base	$\log_b a = \frac{\log_n a}{\log_n b}$	$\log_4 e = \frac{\ln e}{\ln 4} = \frac{1}{\ln 4}$

Un'altra interessante relazione che, in molte circostanze, risolve situazioni di impasse è la seguente: Supponiamo che *c* sia soluzione del logaritmo in base *b* di *a*, ovvero: $\log_b a = c$ [rel.1].

Da ciò si ricava che *c* è la quantità da elevare alla base *b* per ottenere l'argomento *a*: $b^c = a$ [rel.2]

Dato che la base *b* è un numero positivo diverso da 1, la relazione di uguaglianza [rel.1] si conserva se esprimo i due membri come potenza di base *b*, cioè $b^{\log_b a} = b^c$. Il secondo membro di quest'ultima uguaglianza per la [rel.2] è uguale ad *a*, quindi

$$b^{\log_b a} = a.$$