Limiti di successioni

2. Grafica dei limiti

Tipologia: attività di laboratorio
Autore: Luigi Boscaino
Data: 08/01/2016
Destinatari: Classi quinte

Osserviamo l'andamento grafico delle successioni regolari e irregolari attraverso alcuni esempi.

Successione regolare convergente.

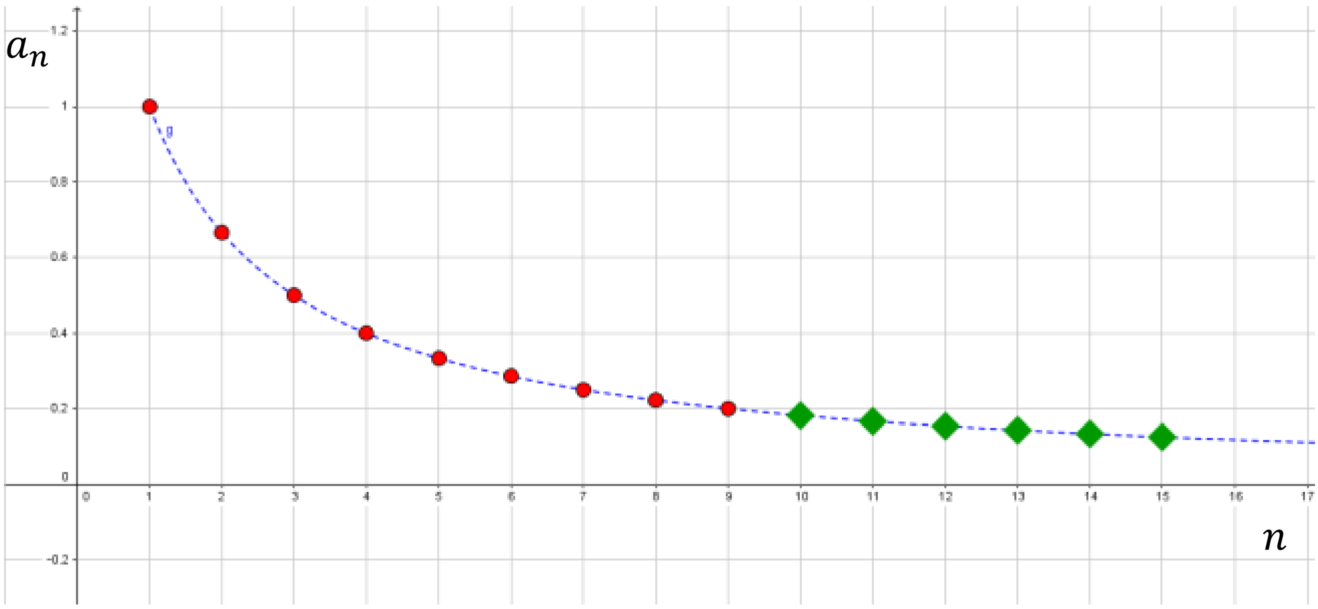
Se la successione, al tendere di n all'infinito, tende ad un valore finito l si dice regolare convergente. Tutto ciò si formalizza nel modo seguente:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

Empiricamente possiamo affermare che i termini della successione assumono valori tanto più vicini a l quanto più mi allontano dal suo primo termine. Ovvero, possiamo sfidare chiunque a scegliere un numero positivo a piacere ε (comunque piccolo), e dimostrare che a partire da un numero naturale n_ε (scelto in funzione di ε), tutti i termini a_n della successione generati dai naturali più grandi di n_ε sono così vicini al valore l da fornire differenze $|a_n - l|$ sempre più piccole del numero ε prescelto. Formalizzando:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon :\ \ \forall n > n_\varepsilon \xRightarrow[implica]{} |a_n - l| < \varepsilon$$

Il grafico sottostante riporta, per i naturali da 1 a 15, il comportamento della successione $a_n = \frac{2}{n+1}$. Essa assume il valore 1 per n=1 e il valore 0,125 per n=15. Tale osservazione ci spinge a formulare la seguente congettura: la successione tende a zero al crescere di n, ovvero $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0$. Pertanto se si sceglie un ε arbitrario, ad esempio $\varepsilon = 0{,}2$, deve esistere un numero naturale, a partire dal quale, i termini della successione meno il limite danno una differenza più piccola di 0,2, cioè $\frac{2}{n+1} - 0 < 0{,}2$. Dunque isolando n si individua il numero naturale (dipendente da ε), a partire dal quale la precedente relazione è soddisfatta: $n + 1 > \frac{1}{0{,}2}$ da cui $n > \frac{1}{0{,}2} - 1$ ossia $n > 9$. Infatti, come si evince dal grafico, a partire dal numero 10 i termini della successione $a_{10},\ a_{11}, a_{12}, \ldots$ sono più piccoli di 0,2 (valore scelto per ε).



Successione regolare divergente.

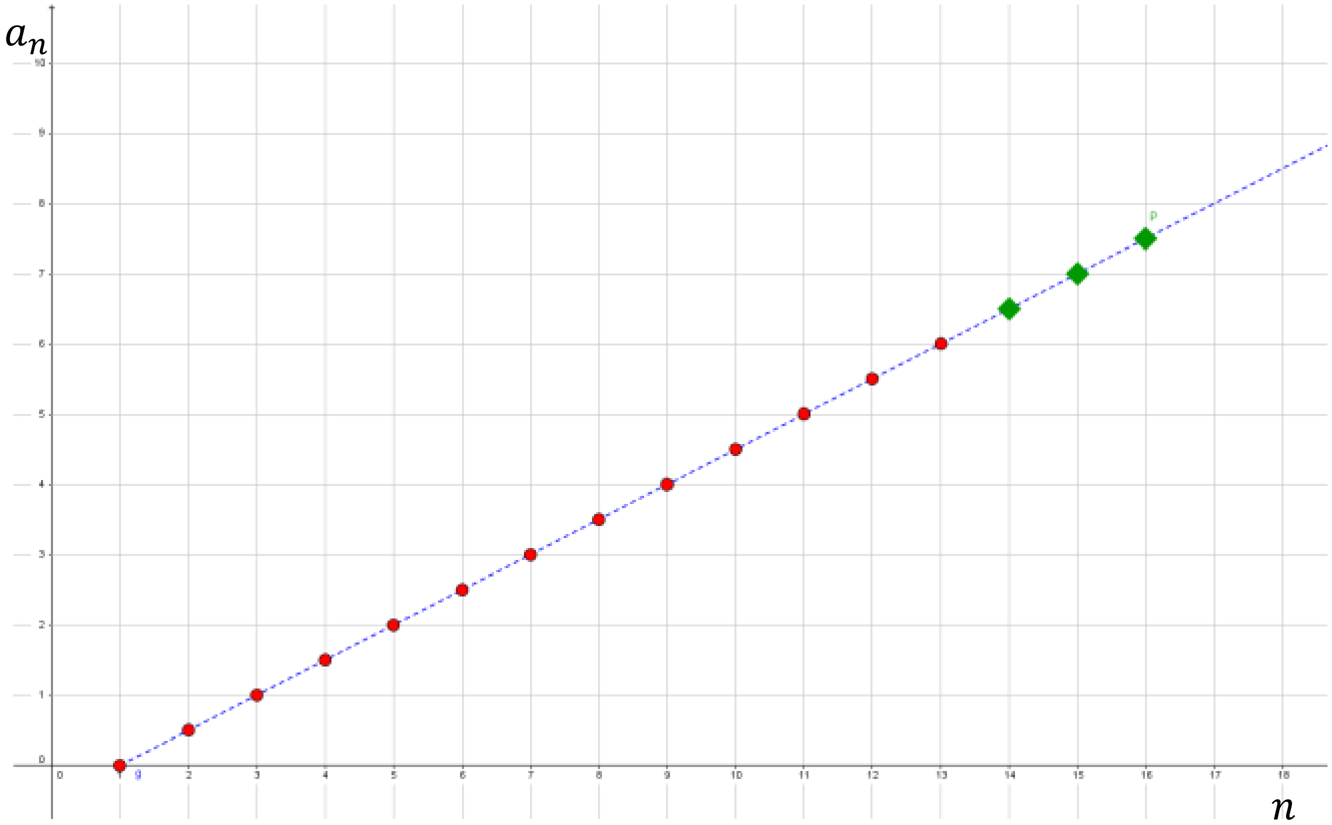
Se la successione, al tendere di n all'infinito, tende a più infinito o a meno infinito si dice regolare divergente. Tutto ciò si formalizza nel modo seguente:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$$

Empiricamente possiamo affermare che i termini della successione assumono valori in modulo tanto più grandi quanto più mi allontano dal suo primo termine. Ovvero, possiamo sfidare chiunque a scegliere un numero positivo a piacere M (comunque grande), e dimostrare che a partire da un numero naturale n_M (scelto in funzione di M), tutti i termini a_n della successione generati dai naturali più grandi di n_M risultano in valore assoluto più grandi del numero M prescelto $|a_n| > M$. Formalizzando:

$$\forall M > 0\ \exists n_M : \quad \forall n > n_M \underset{implica}{\Longrightarrow} |a_n| > M$$

Il grafico sottostante riporta, per i naturali da 1 a 16, il comportamento della successione $a_n = \frac{n-1}{2}$. Essa assume il valore 0 per n=1 e il valore 7,5 per n=16. Tale osservazione ci spinge a formulare la seguente congettura: la successione tende a $+\infty$ al crescere di n, ovvero $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2} = \infty$. Pertanto se si sceglie un M arbitrario, ad esempio $M = 6$, deve esistere un numero naturale, a partire dal quale, i termini della successione assumono valore maggiore di M, cioè $\frac{n-1}{2} > 6$. Dunque isolando n si individua il numero naturale (dipendente da M), a partire dal quale la precedente relazione è soddisfatta: $n - 1 > 12$ da cui $n > 13$. Infatti, come si evince dal grafico, a partire dal numero 14 i termini della successione a_{14}, $a_{15}, a_{16}, \ldots$ sono più grandi di 6 (valore scelto per M).



Successione irregolare.

Se la successione, al tendere di n all'infinito, genera indecisione e non consente di stabilire il valore a cui tende, si dice successione irregolare. Tutto ciò si formalizza nel modo seguente:

$$\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$$

Il grafico sottostante riporta, per i naturali da 1 a 6, il comportamento della successione $a_n = (-2)^n$. Essa assume il valore -2 per n=1 e il valore +64 per n=6. Tuttavia, a differenza degli esempi precedenti, i termini della successione non sono regolarmente crescenti o decrescenti ma assumono valore positivo per n pari e negativo per n dispari: $a_1 = (-2)^1,\ a_2 = (-2)^2, a_3 = (-2)^3, a_4 = (-2)^4,\ a_5 = (-2)^5, a_6 = (-2)^6$. Ciò non consente di stabilire il valore che assume la successione quando n tende all'infinito.