# Limiti di successioni

# 1. Algebra dei limiti

***Tipologia: attività di laboratorio***
***Autore: Luigi Boscaino***
***Data: 07/01/2016***
***Destinatari: Classi quinte***

Una successione numerica è una sequenza ordinata di numeri costruita sulla base di una corrispondenza tra i numeri Naturali e i numeri Reali: $n \in N \to a_n \epsilon R$.

Le successioni si scrivono nella forma: $a_1 a_2, \dots, a_n, \dots$

Gli infiniti elementi della successione si dicono termini e $a_n$ si dice termine generale della successione.

I termini della successione sono infiniti, pertanto è importante conoscere il comportamento della successione man mano che cresce il valore di n. Si introduce, così, il comportamento della successione al tendere di n all'infinito ($n \to \infty$).

Una successione può essere regolare convergente, regolare divergente o irregolare.

## Successione regolare convergente.

Se la successione, al tendere di n all'infinito, tende ad un valore finito $l$ si dice regolare convergente. Tutto ciò si formalizza nel modo seguente:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

Empiricamente possiamo affermare che i termini della successione assumono valori tanto più vicini a $l$ quanto più mi allontano dal suo primo termine. Ovvero, possiamo sfidare chiunque a scegliere un numero positivo a piacere $\mathcal{E}$ (comunque piccolo), e dimostrare che a partire da un numero naturale $n_\varepsilon$ (scelto in funzione di $\mathcal{E}$), tutti i termini $a_n$ della successione generati dai naturali più grandi di $n_\varepsilon$ sono così vicini al valore $l$ da fornire differenze $|a_n - l|$ sempre più piccole del numero $\varepsilon$ prescelto. Formalizzando:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon :\ \forall n > n_\varepsilon \xrightarrow[implica]{} |a_n - l| < \varepsilon$$

## Successione regolare divergente.

Se la successione, al tendere di n all'infinito, tende a più infinito o a meno infinito si dice regolare divergente. Tutto ciò si formalizza nel modo seguente:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$$

Empiricamente possiamo affermare che i termini della successione assumono valori in modulo tanto più grandi quanto più mi allontano dal suo primo termine. Ovvero, possiamo sfidare chiunque a scegliere un numero positivo a piacere $M$ (comunque grande), e dimostrare che a partire da un numero naturale $n_M$ (scelto in funzione di $M$), tutti i termini $a_n$ della successione generati dai naturali più grandi di $n_M$ risultano in valore assoluto più grandi del numero $M$ prescelto $|a_n| > M$. Formalizzando:

$$\forall M > 0\ \exists n_M :\ \forall n > n_M \xrightarrow[implica]{} |a_n| > M$$

| | |
|---|---|
| **Limiti di successioni** | ***Tipologia: attività di laboratorio*** |
| **1. Algebra dei limiti** | ***Autore: Luigi Boscaino*** |
| | ***Data: 07/01/2016*** |
| | ***Destinatari: Classi quinte*** |

## Successione irregolare.

Se la successione, al tendere di n all'infinito, genera indecisione e non consente di stabilire il valore a cui tende, si dice successione irregolare. Tutto ciò si formalizza nel modo seguente:

$$\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$$

| Esempio di successione convergente: | Esempio di successione divergente: | Esempio di successione irregolare: |
|---|---|---|
| $a_n = \frac{1}{n}$ | $a_n = 2n$ | $a_n = (-1)^n$ |
| $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ | $\lim_{n\to\infty} 2n = \infty$ | $\lim_{n\to\infty} (-1)^n = ?$ |

Per il calcolo dei limiti delle successioni risulta indispensabile l'applicazione dei …

### teoremi fondamentali

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \qquad con\ b_n \neq 0\ e\ \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^k = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^k \qquad con\ a_n > 0\ e\ \lim_{n\to\infty} a_n > 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n} \qquad con\ a_n \geq 0\ e\ \lim_{n\to\infty} a_n \geq 0$$

$$\lim_{n\to\infty}(a)^{b_n} = a^{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} sen(a_n) = sen\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} cos(a_n) = cos\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} tg(a_n) = tg\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \qquad con\ a_n \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ e\ \lim_{n\to\infty} a_n \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\lim_{n\to\infty} \log_b(a_n) = \log_b\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \qquad con\ a_n > 0\ e\ \lim_{n\to\infty} a_n > 0$$