Limiti di funzioni

1. Verifica del limite

Tipologia: attività di laboratorio
Autore: Marianna Angiolelli
Data: 29/11/2014
Destinatari: Classi quinte

Verifica del limite: $\lim_{x\to -2} \frac{x}{x+1} = 2$

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \mathrm{I}_\varepsilon(-2) : \forall x \in \mathrm{I}_\varepsilon(-2); \left|\frac{x}{x+1} - 2\right| < \varepsilon$$

La disequazione in valore assoluto si risolve unendo le soluzioni dei due sistemi seguenti:

$$\begin{cases} \frac{x}{x+1} - 2 \geq 0 \\ \frac{x}{x+1} - 2 < \varepsilon \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} \frac{x}{x+1} - 2 < 0 \\ \frac{x}{x+1} - 2 > -\varepsilon \end{cases}$$

Cioè

$$0 \leq \frac{x}{x+1} - 2 < \varepsilon \quad \cup \quad -\varepsilon < \frac{x}{x+1} - 2 < 0 \text{ da cui si ottiene: } -\varepsilon < \frac{x}{x+1} - 2 < \varepsilon$$

Pertanto i due sistemi si possono ricondurre a un solo sistema dato da:

$$\begin{cases} \frac{x}{x+1} - 2 < \varepsilon \\ \frac{x}{x+1} - 2 < -\varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x - 2x - 2 - \varepsilon x - \varepsilon}{x+1} < 0 \\ \frac{x - 2x - 2 + \varepsilon x + \varepsilon}{x+1} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{(-1-\varepsilon)x - 2 - \varepsilon}{x+1} < 0 & (1) \\ \frac{(-1+\varepsilon)x - 2 + \varepsilon}{x+1} > 0 & (2) \end{cases}$$

Risolvo la disequazione (1):

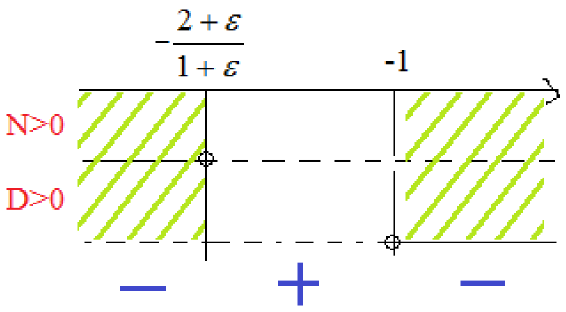
$$N > 0 \Rightarrow -(1+\varepsilon)x - 2 - \varepsilon > 0 \Rightarrow -(1+\varepsilon)x > 2 + \varepsilon$$

Dovremmo porre $1+\varepsilon > 0$, dato che è un coefficiente letterale; tuttavia sapendo che ε è positivo e tendente a zero si può evitare di risolvere per $\varepsilon > -1$.

$$-\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon} x > \frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon} \Rightarrow x < -\frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

$$D > 0 \Rightarrow x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

Grafico relativo al rapporto dei segni



La disequazione (1) è risolta per:

$$x < -\frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon} \cup x > -1$$

Risolvo la disequazione (2):

$$\frac{(-1+\varepsilon)x-2+\varepsilon}{x+1}>0$$

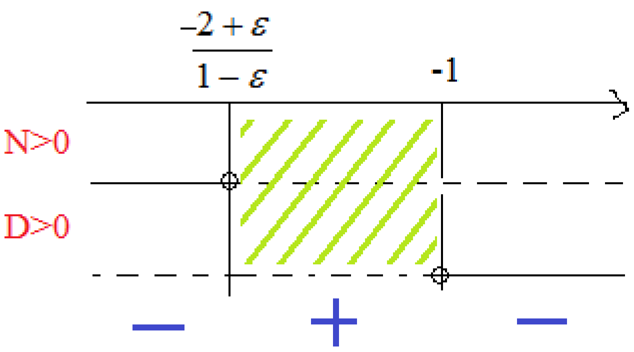
$$N>0 \Rightarrow -(1+\varepsilon)x-2+\varepsilon>0 \Rightarrow -(1+\varepsilon)x>2-\varepsilon$$

Da cui essendo $-1+\varepsilon<0$ (dato che ε è un addendo ininfluente), per ε sufficientemente piccolo si ha:

$$\frac{-1+\varepsilon}{-1+\varepsilon}x<\frac{2-\varepsilon}{-1+\varepsilon} \Rightarrow x<\frac{2-\varepsilon}{-1+\varepsilon} \Rightarrow x<\frac{2-\varepsilon}{-1+\varepsilon} \text{ o preferibilmente } x<\frac{-2+\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

$$D>0 \Rightarrow x>-1$$

Grafico relativo al rapporto dei segni



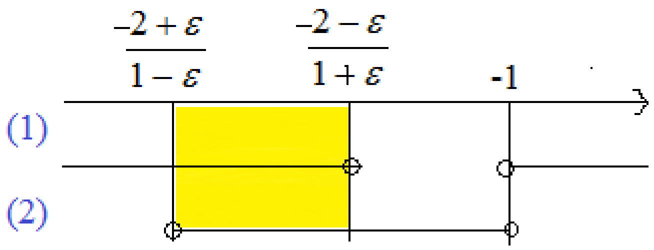
La disequazione (2) è risolta per:

$$\frac{-2+\varepsilon}{1-\varepsilon}<x<-1$$

Dunque riproponendo il sistema si ha:

$$\begin{cases} x<\dfrac{-2-\varepsilon}{1+\varepsilon} \cup x>-1 \\ \dfrac{-2+\varepsilon}{1-\varepsilon}<x<-1 \end{cases} \Rightarrow$$

Grafico delle soluzioni comuni ovvero delle linee continue sovrapposte



La soluzione del sistema è:

$$\frac{-2+\varepsilon}{1-\varepsilon}<x<\frac{-2-\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

Soluzione: $\mathrm{I}_{\varepsilon}(-2)=\left(\dfrac{-2+\varepsilon}{1-\varepsilon};\dfrac{-2-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)$