Interpretazione dei grafici

2. Costruzione dell'inversa

Tipologia: attività di laboratorio

Autore: Luigi Boscaino

Data: 14/12/2015

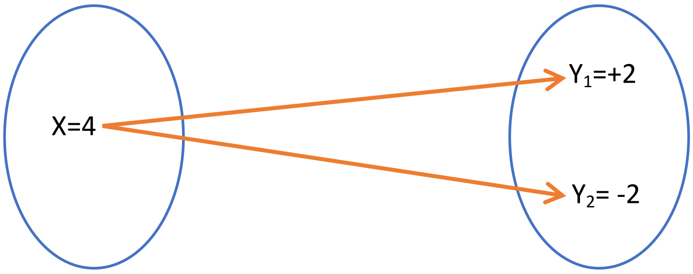
Assegnata una funzione $y = f(x)$, la costruzione del grafico della sua inversa, è più semplice dell'interpretazione della reciproca. Infatti data una funzione $y = f(x)$ e detto G il suo grafico nel piano xoy, il grafico G' dell'inversa si ottiene costruendo la curva simmetrica della funzione data rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante (retta di equazione $y = x$). ATTENZIONE! Da un punto di vista grafico è più semplice disegnare l'inversa piuttosto che la reciproca, ma per le funzioni inverse la questione si complica. Una funzione assegnata in R e a valori in R non sempre è dotata di inversa. Infatti, non tutte le funzioni sono invertibili. Consideriamo la parabola di vertice l'origine e primo coefficiente uno: $y = x^2$. Tale funzione ad ogni valore di x associa uno e un solo valore di y, pertanto è correttamente definita. La funzione inversa si ottiene scambiando il rapporto di dipendenza delle variabili e poi ristabilendo i ruoli di x ed y. Quindi per scambiare il rapporto di dipendenza tra le variabili si isola la x, si pone $y \geq 0$ e si ottiene

$$x = \pm\sqrt{y}$$

Da cui ripristinando i ruoli delle variabili si ottiene l'inversa

$$y = \pm\sqrt{x}$$

Questa relazione è polidroma, ovvero assegnato un qualunque valore positivo ad x, per esso si ottengono due valori di y.



Dunque non si tratta di una funzione. Pertanto possiamo affermare che mentre tutte le funzioni prevedono l'esistenza della reciproca, non tutte hanno l'inversa. *Si dicono invertibili soltanto le funzioni biunivoche o biiettive*. Si tratta di funzioni che godono di due proprietà: iniettività e suriettività (vedi videolezione).

Una funzione è iniettiva se a coppie di elementi distinti del Dominio associa coppie di elementi distinti nel codominio, ovvero due valori diversi di x hanno due immagini distinte nel codominio.

Nell'esempio precedente della parabola, l'iniettività è compromessa dal fatto che tutte le coppie di numeri opposti nel dominio generano immagini uguali (-3 e +3 sono due valori distinti di x ma la trasformazione tramite $y = x^2$ produce in entrambi i casi $y = 9$).

Premesso che, a mio avviso, per le funzioni da R in R, il dominio è la restrizione dell'insieme dei reali di partenza che hanno immagine in R e, di conseguenza, il codominio coincide con l'insieme delle immagini, in quanto è quella parte dell'insieme di arrivo che racchiude tutte le trasformazioni di numeri reali presenti nel dominio. *Pertanto, possiamo asserire che una funzione è suriettiva se il codominio coincide con R, ovvero una funzione è suriettiva se ogni elemento dell'insieme di arrivo è immagine di almeno un elemento del dominio*.

Un altro segnale importante per l’invertibilità arriva dalle funzioni strettamente monotòne. Una funzione strettamente monotòna è crescente o decrescente in ogni intervallo in cui la considero. Non è monotòna una funzione che è prima crescente e poi decrescente o viceversa. La monotonia è una condizione sufficiente a garantire l’invertibilità, sebbene non implichi l’iniettività, cioè una funzione monotòna è iniettiva ma una funzione iniettiva non necessariamente è monotòna.

ESEMPI DI FUNZIONI INVERTIBILI E RAPPRESENTAZIONI:

La funzione:

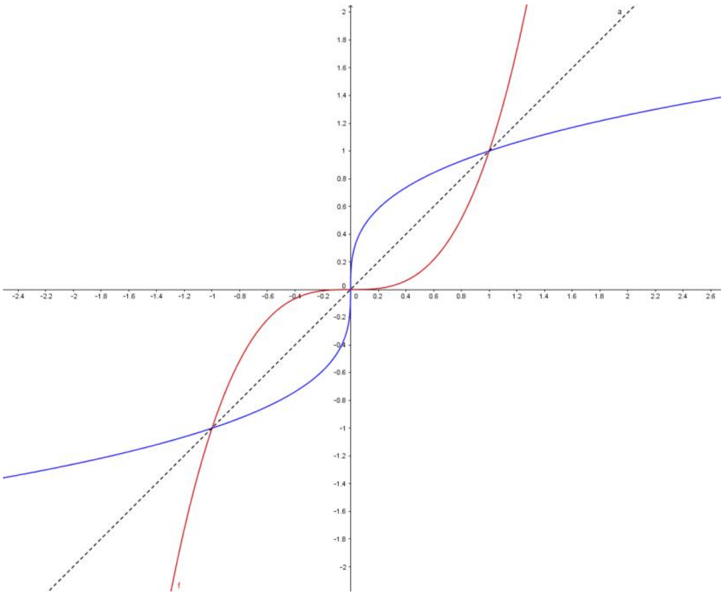
$$y = x^3$$

rappresentata con il grafico G di colore blu, è una funzione biunivoca, pertanto invertibile.

Trattandosi di una monomia di grado dispari è garantita l’iniettività e la suriettività, con due passaggi si scrive l’equazione della funzione inversa:

$y = \sqrt[3]{x}$ grafico di colore rosso.

Si nota la simmetria delle due curve rispetto alla bisettrice (colore nero) di equazione $y = x$.

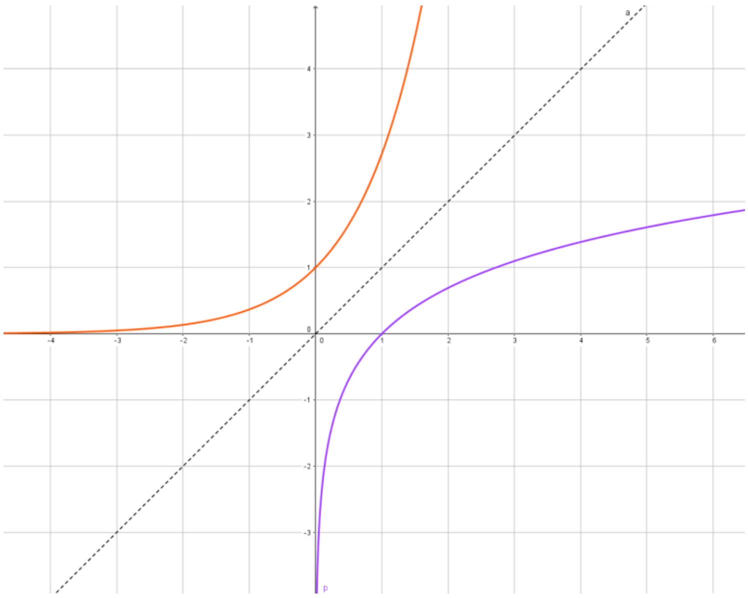


Data la funzione:

$y = e^x$ rappresentata in rosso nell’immagine, si nota che è iniettiva in quanto la curva è monotona crescente in tutto R, mentre non è suriettiva in tutto R ma in una sua restrizione, ovvero in R^+. Dunque restringendo il codominio ai reali positivi si può ottenere l’inversa:

$y = \ln(x)$, vedi rappresentazione grafica in viola.

Appare chiara, anche in questa rappresentazione la simmetria delle due curve.



L’inversa si ottiene passando al logaritmo naturale per ambo i membri: $\ln(y) = \ln(e^x)$. L’esponente x del numero di Nepero “e” è diventato esponente dell’argomento di un logaritmo, pertanto si può anche esprimere come fattore del logaritmo $\ln(y) = x \cdot \ln(e)$. Sapendo che il logaritmo naturale di *e* vale 1, si ottiene la relazione $\ln(y) = x$. In essa sarà sufficiente ripristinare le due variabili per ottenere l’inversa.