Da un'omotetia del triangolo rettangolo alla costruzione di due coniche.

COSTRUZIONE GEOMETRICA

Si rappresenti un segmento verticale avente per estremi l'origine O=(0,0) e $\mathrm{B}=(0,\sqrt{2})$;

Si tracci l'asse *r* del segmento OB;

Si consideri un punto C, generico, sull'asse *r*;

Si conduca per C la perpendicolare *s* all'asse *r*;

Si unisca C con O, tracciando una retta *z*;

Si conduca dal punto B la perpendicolare *t* a *z*, e si indichi con E il punto di intersezione;

Sia D il punto in cui le rette *t* ed *s* si incontrano;

Il punto E, che rappresenta il centro dell'omotetia, descrive una circonferenza quando C si muove lungo l'asse;

Mentre, il punto D descrive una parabola.

STUDIO ANALITICO NEL PIANO CARTESIANO

Coordinate dei punti

O=(0,0), $\mathrm{B}=(0,\sqrt{2}), C=\left(c,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

il punto E si ottiene dall'intersezione delle rette t e z, il punto D si ottiene dall'intersezione delle rette *t* ed *s.*

Ricordiamo che i punti E e D descrivono i due luoghi.

Equazioni delle rette:

$r: y=\frac{\sqrt{2}}{2};$ $\quad$ *asse del segmento OB*

$s: x=c;$ $\quad$ *retta perpendicolare ad r passante per C*

$z: y=\frac{\sqrt{2}}{2c}x;$ $\quad$ *retta passante per i punti O e C;*

$t: y=-\sqrt{2}cx+\sqrt{2};$ $\quad$ *retta per BD, perpendicolare a z.*

$$\begin{cases} y=\frac{\sqrt{2}}{2c}x \\ y=-\sqrt{2}cx+\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{da cui le coordinate di } E=\left(\frac{2c}{2c^2+1},\frac{\sqrt{2}}{2c^2+1}\right)$$

$$\begin{cases} x=c \\ y=-\sqrt{2}cx+\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{da cui le coordinate di } D=\left(c,-\sqrt{2}c^2+\sqrt{2}\right)$$

EQUAZIONE PARAMETRICA ED EQUAZIONE CARTESIANA DEI LUOGHI

Il luogo descritto dal punto E al variare della posizione del punto C, è espresso dall'equazione parametrica

$$\begin{cases} x = \dfrac{2c}{2c^2+1} \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2c^2+1} \end{cases}$$

Il luogo descritto dal punto E al variare della posizione del punto C, è espresso dall'equazione cartesiana

$$2x^2 + 2y^2 - 2\sqrt{2}y = 0$$

Il luogo descritto dal punto D al variare della posizione del punto C, è espresso dall'equazione parametrica

$$\begin{cases} x = c \\ y = -\sqrt{2}c^2 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Il luogo descritto dal punto D al variare della posizione del punto C, è espresso dall'equazione cartesiana

$$y = -\sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}$$