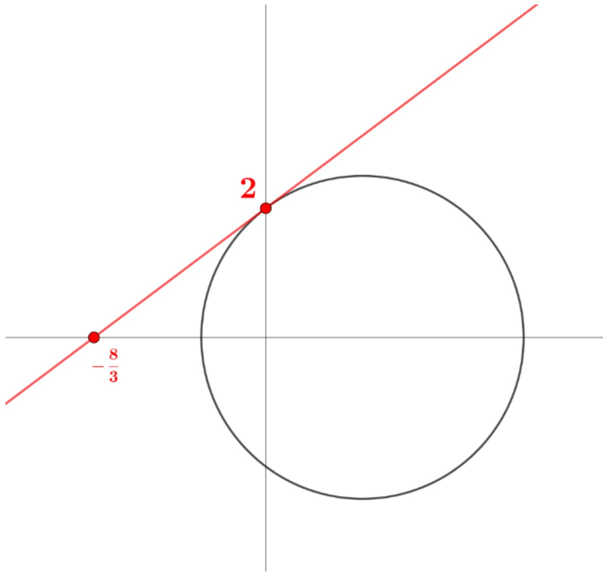
Geometria analitica

LE CONICHE: La circonferenza

Tipologia: attività di laboratorio
Autore: Luigi Boscaino
Data: 03/01/2019
Destinatari: Classi terze

INDIVIDUARE STRATEGIE E APPLICARE METODI PER RISOLVERE PROBLEMI

Scrivi l'equazione della circonferenza in figura che risulta tangente nel punto $A = (0, 2)$, *alla retta* r *e ha il centro sulla retta* s *di equazione* $y = -2x + 3$.



I strategia (scolastica)

Argomentazione: L'equazione canonica della circonferenza, $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, ha il centro di coordinate $C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$. Dato che il centro è un punto della retta di equazione $y = -2x + 3$, possiamo ricavare l'ordinata del centro dalla condizione di appartenenza di un punto a una retta. A questo primo step segue l'appartenenza del punto $A = (0, 2)$ alla circonferenza, mentre, una terza condizione è fornita dalla tangenza della retta alla circonferenza, condizione che prevede il sistema tra l'equazione della retta e l'equazione parametrica della circonferenza; all'equazione risultante si applica la condizione per la tangenza, imponendo il delta uguale a zero (soluzione doppia).

Percorso risolutivo: l'ascissa del centro della circonferenza è $-\frac{a}{2}$, e dato che il centro si trova sulla retta $y = -2x + 3$, le coordinate di C ne soddisfano l'equazione.

Quindi l'ordinata $-\frac{b}{2}$ del centro si può ottenere nel modo seguente

$$-\frac{b}{2} = -2\left(-\frac{a}{2}\right) + 3 \Rightarrow -\frac{b}{2} = a + 3,$$

Ne consegue che

$$b = -2a - 6.$$

Le nuove coordinate del centro C saranno:

$C = \left(-\frac{a}{2}, a + 3\right)$ e l'equazione della circonferenza, sostituendo b, assume la forma seguente:

$$x^2 + y^2 + ax + (-2a - 6)y + c = 0,$$

Passaggio per il punto $A = (0, 2)$

$$4 + (-2a - 6) \cdot 2 + c = 0 \Rightarrow c = 4a + 8$$

L'equazione della circonferenza, nel solo parametro a assume la forma:

$$x^2 + y^2 + ax + (-2a - 6)y + 4a + 8 = 0,$$

Detto $B = \left(-\frac{8}{3}, 0\right)$, il punto in cui la retta tangente incontra l'asse delle ascisse, la retta r per AB ha equazione:

$$y = \frac{3}{4}x + 2$$

Confrontiamo le circonferenze con la retta attraverso il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + (-2a - 6)y + 4a + 8 = 0 \\ y = \frac{3}{4}x + 2 \end{cases}$$

Dalla sostituzione si ottiene l'equazione letterale di secondo grado

$$\frac{25}{16}x^2 - \left(\frac{1}{2}a + \frac{3}{2}\right)x = 0$$

Imponendo la condizione di tangenza, ovvero $\Delta = 0$, si ottiene il valore di a

$$\left(\frac{1}{2}a + \frac{3}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow a = -3$$

Ricostruendo le relazioni tra i coefficienti (in colore azzurro)

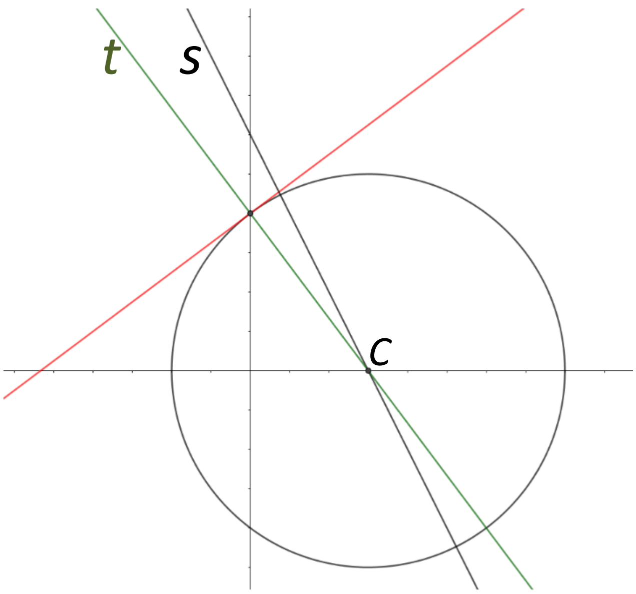
$$\begin{cases} a = -3 \\ b = -2a - 6 \\ c = 4a + 8 \end{cases}$$

Si ottiene l'equazione della circonferenza

$$x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0.$$

II strategia (logico-geometrica)

Argomentazione: Nel grafico a destra sono presenti due nuove rette: la retta *s,* a cui appartiene il centro della circonferenza (in colore nero), e la retta t (in colore verde), passante per il punto $A = (0, 2)$ e perpendicolare alla retta r tangente alla circonferenza;. Ne consegue che la retta t è asse della circonferenza e passa per il centro di quest'ultima, ergo le due rette s e t si incontrano nel centro C della circonferenza.



Conoscendo il centro e il punto A sulla circonferenza si può giungere facilmente all'equazione della circonferenza.

Percorso risolutivo: sapendo che due rette perpendicolari hanno i coefficienti angolari antireciproci, ovvero inverso ed opposto uno dell'altro, dal fascio per $A = (0, 2)$, si estrae l'equazione della perpendicolare t alla retta r di equazione $y = \frac{3}{4}x + 2$, avente coefficiente angolare $m = -\frac{4}{3}$,

$$y - 2 = -\frac{4}{3} \cdot (x - 0) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + 2$$

Il centro è il punto di incontro tra t ed s:

$$\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = -\frac{4}{3}x + 2 \end{cases}$$

Dal confronto si ha

$$C = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

Da cui

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} = \frac{3}{2} \\ -\frac{b}{2} = 0 \\ 4 + 2b + c = 0 \quad A \text{ è } punto\ della\ circonferenza \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ c = -4 \end{cases}$$

Si ottiene l'equazione della circonferenza

$x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0.$

III strategia (deduttiva)

Argomentazione: si giunge più rapidamente all'equazione della circonferenza sfruttando la formula di sdoppiamento. Ricordiamo che si ricorre alla formula di sdoppiamento quando sono note l'equazione della circonferenza e le coordinate di un suo punto e si intende conoscere l'equazione della retta tangente alla circonferenza nel punto dato. In questo problema si scambiano i ruoli, ovvero si conoscono il punto di tangenza $A = (0, 2)$ e l'equazione della tangente $y = \frac{3}{4}x + 2$, mentre si vuole conoscere l'equazione della circonferenza. In tale circostanza si userà l'equazione canonica della circonferenza, a coefficienti letterali, per risalire alla formula di sdoppiamento. Per ottenere l'equazione della circonferenza basterà uguagliare i coefficienti noti della retta tangente alla circonferenza, a quelli letterali della formula di sdoppiamento.

Percorso risolutivo: data l'equazione canonica della circonferenza

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$,

scriviamo la formula di sdoppiamento per determinare l'equazione della tangente ad essa in un suo punto $P = (x_0, y_0)$, ricordando che dalle infinite circonferenze rappresentate dall'equazione generale vanno estratte quelle passanti per P, ovvero va imposta la condizione di appartenenza di P alle circonferenze,

$$x_0 \cdot x + y_0 \cdot y + a\frac{x + x_0}{2} + b\frac{y + y_0}{2} + c = 0$$

Fatto ciò, dato che conosciamo sia il punto $A = (0, 2)$ della circonferenza che l'equazione $y = \frac{3}{4}x + 2$ della retta tangente ad essa nl punto A, operiamo le sostituzioni e, successivamente, uguagliamo il coefficiente angolare della generica tangente alla circonferenza al coefficiente angolare $m = \frac{3}{4}$, della retta assegnata.

$$0 \cdot x + 2 \cdot y + a\frac{x + 0}{2} + b\frac{y + 2}{2} + c = 0 \Rightarrow 2y + \frac{a}{2}x + \frac{b}{2}y + b + c = 0 \qquad (1)$$

Ricordiamo che dalle circonferenze ottenute va estratto il sottoinsieme delle circonferenze passanti per il punto A:

$0^2 + 2^2 + a \cdot 0 + b \cdot 2 + c = 0 \;\Rightarrow\; c = -2b - 4$

Sostituendo opportunamente nella (1) si ottiene

$$2y + \frac{a}{2}x + \frac{b}{2}y + b - 2b - 4 = 0$$

da cui

$ax + (4 + b)y - 2b - 8 = 0 \qquad (2)$.

Ricordiamo che il centro è vincolato alla retta di equazione $y = -2x + 3$, pertanto

$-\frac{b}{2} = -2\left(-\frac{a}{2}\right) + 3 \Rightarrow -\frac{b}{2} = a + 3 \;\Rightarrow\; b = -2a - 6$, operando le opportune sostituzioni nella (2), si ha

$$ax + (-2a - 2)y + 4a + 4 = 0$$

uguagliando i coefficienti angolari delle due equazioni

$$\frac{a}{2a+2} = \frac{3}{4} \Rightarrow 2a = 3a + 3 \quad con\ a \neq -1$$

si ottiene $a = -3$

Procedendo a ritroso ricavo i valori di b e di c. Si ottiene, così, l'equazione della circonferenza

$$x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0.$$