Gerarchia degli infiniti

Tipologia: Laboratorio
Autore: Luigi Boscaino
Destinatari: Classi quinte

L'ordine degli infiniti consiste nel confrontare la rapidità con cui le funzioni divergono. Nel caso delle funzioni polinomiali algebriche il grado del polinomio caratterizza l'ordine dell'infinito. Ad esempio un polinomio di quinto grado diverge più rapidamente di un polinomio di terzo grado. Significa che tende più rapidamente all'infinito la funzione di grado maggiore.

Esempi:

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-5x+1}{x-5} = \infty$; ciò deriva dal fatto che il numeratore diverge più rapidamente del denominatore, pertanto l'infinito fratto un numero tende all'infinito.

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+1}{x^3+2} = 0$; ciò deriva dal fatto che il numeratore diverge meno rapidamente del denominatore, pertanto un numero diviso l'infinito tende a zero.

Ma quando gli infiniti son dello stesso ordine?

$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3-2x+1}{3x^3+2} = \frac{4}{3}$; In questo caso diciamo che le funzioni al numeratore e al denominatore sono infiniti simultanei, pertanto si instaura una sorta di equilibrio. Il limite, in tali circostanze, è finito ed è dato dal rapporto dei coefficienti dei termini di massimo grado.

Gli infiniti $f(x) = x^3 \cdot (\cos x - 1)$ e $g(x) = x^3$, non sono confrontabili al tendere di x all'infinito.

TEOREMA SULLA GERARCHIA DEGLI INFINITI

Date le tre famiglie di funzioni

$(\log_a x)^\alpha$; x^β; b^x; sapendo che α, β > 0 e a, b > 1

allora, per $x \to \infty$, ognuna, a partire da sinistra, è un infinito di ordine inferiore rispetto alla successiva; da cui:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\log_a x)^\alpha}{x^\beta} = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x^\beta}{b^x} = 0$$