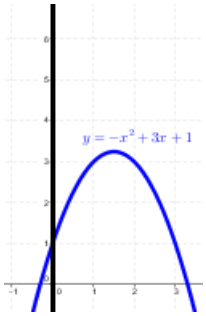
Laboratorio didattico classi quarte: geometria analitica

Anno scolastico: 2013/2014

Attività:

Le coniche



Introduzione

"*La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche*" e anche luoghi geometrici come la parabola, la circonferenza, l'iperbole e l'ellisse, "*senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.*"(Galileo Galilei, *Il Saggiatore*). Così Galilei nel 1623, scriveva della natura: un libro tutto da scoprire dall'uomo a cui è data la possibilità di farlo tramite il metodo scientifico. La natura è, quindi, un qualcosa che potremmo definire coincidente al mondo della matematica, un mondo di meraviglia fatto di precise regole e perché no, anche di intuito. Tra questa infinità di teoremi, dimostrazioni, una parte è occupata dalla **geometria analitica** il cui atto di nascita è considerato l'appendice *Geometria* del *Discorso sul metodo* di *Cartesio.* Pertanto, molte volte non ci si rende conto che in realtà siamo "abbracciati", o meglio "intrinsechi" in così tanta matematica che sfugge al nostro occhio. In questo percorso, voglio però soffermarmi su un particolare argomento delle scienze matematiche: le **coniche**. Si tratta di figure geometriche che è possibile riscontrare in ogni campo, dal microcosmo dell'uomo nelle sue perfette parti anatomiche (il cuore ha pressoché una forma conica) attraversando poi l'ambiente quotidiano: dalle diverse sezioni di un banalissimo cono gelato all'ellisse di un giardiniere, giungendo in seguito all'ambiente esterno e all'arte, per *arrivare* alla complessità del macrocosmo: l'universo dove i pianeti descrivono orbite ellittiche.

In particolare nell'arte abbiamo diverse architetture che si basano strutturalmente su una delle quattro coniche, basti pensare al tempio greco di tipo *monoptero* avente forma circolare e poi ripreso nel Rinascimento; all'anfiteatro romano come il Colosseo a Roma. Ma è tra il 1500 e il 1600 –Rinascimento e Barocco- che le coniche acquistano particolare importanza, infatti, in questo periodo si privilegia l'uso della linea curva nei confronti della linea retta, difatti, le piante delle chiese in questo corso storico hanno spesso forma ellittica così come le arcate. Esempi

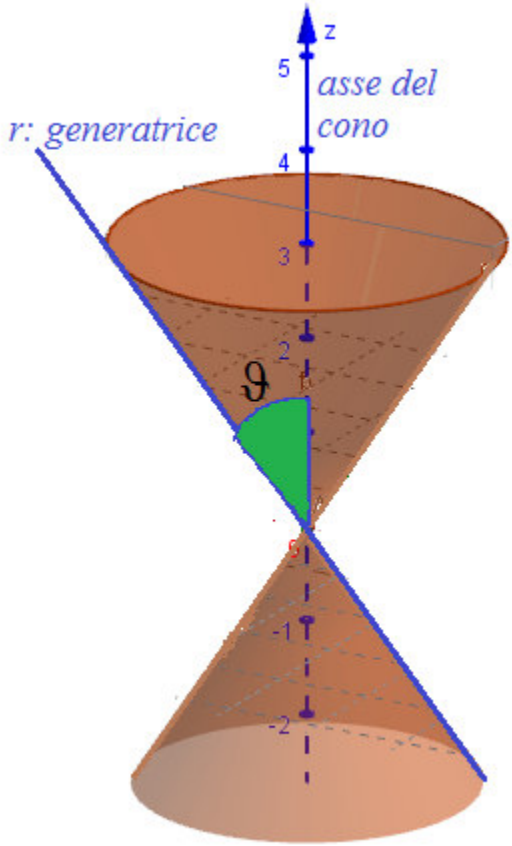
architettonici di questo periodo sono la cupola di Santa Maria del Fiore a Firenze di Filippo Brunelleschi.

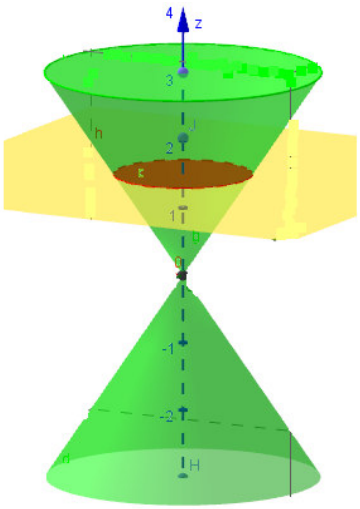
Bisogna infine considerare che le coniche sono tuttora utilizzate come modello in moltissime opere d'arte moderne sia in pittura che architettura.

Marianna Angiolelli

Le coniche in geometria analitica

La circonferenza, l'ellisse, l'iperbole e la parabola sono definite globalmente *coniche o sezioni coniche*, in quanto sono originate dall'intersezione tra un piano e un cono non definito a due falde generato dalla rotazione completa di una retta *r* detta *generatrice*, intorno ad una seconda retta *a* ad essa incidente e non perpendicolare detta *asse del cono*. Inoltre l'ampiezza dell'angolo tra le due rette è detta *apertura del cono* ed nel disegno è indicata con la lettera greca ϑ.
Così dalle differenti inclinazione del piano si ottengono i diversi tipi di coniche.

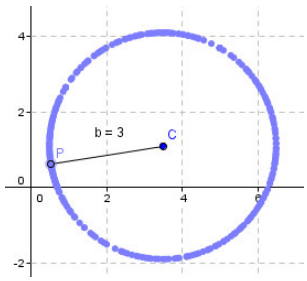




1. Circonferenza

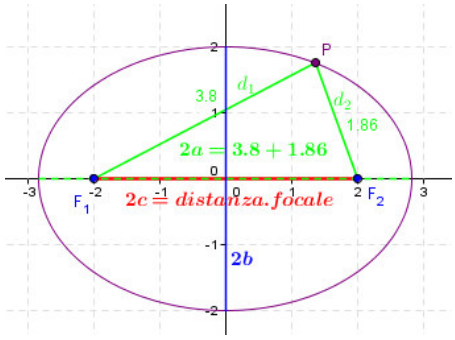
Definizione: *luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto* centro.

Si ottiene quando il piano taglia perpendicolarmente il cono, in modo che la retta passante per il piano e l'asse del cono formino un angolo retto.



Equazione cartesiana $C(\alpha;\beta)$	$(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2=r^2$
Equazione canonica	$x^2+y^2+ax+by+c=0$

2. Ellisse

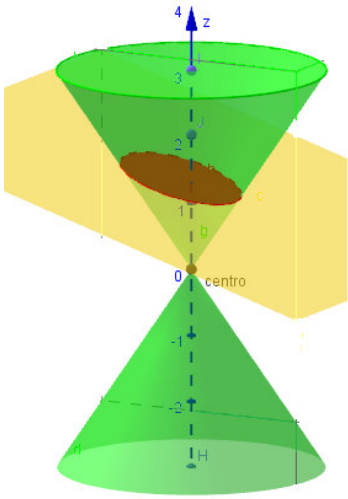


Definizione: *luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da un punto P dell'ellisse e due punti detti* fuochi.

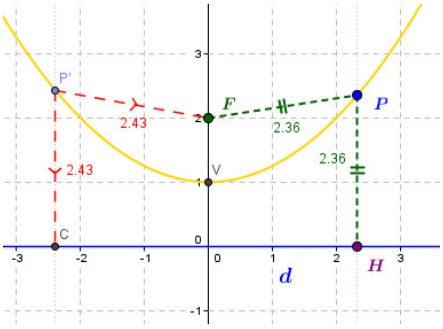
Si ottiene quando si taglia obliquamente un piano ed in particolare l'apertura del cono è minore dell'inclinazione del piano. Inoltre dalla sua origine come sezione conica deriva proprio il termine "ellisse" che in greco significa "lasciare, mancare" ed indica proprio che l'angolo del cono *manca* di qualcosa, infatti, esso è minore di quello del piano.

Equazione canonica: $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$

NB: L'ellisse ha l'asse maggiore sull'asse x se $a^2 > b^2$, *in caso contrario l'asse maggiore si trova sull'asse y.*



3. Parabola

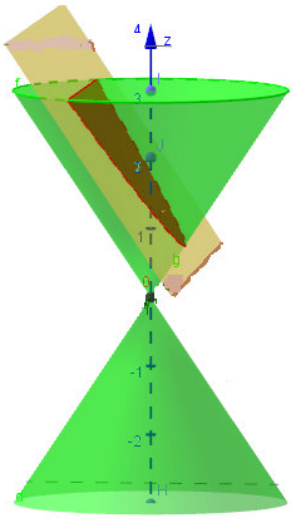


Definizione: *luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto* fuoco *e da una retta d detta* direttrice.

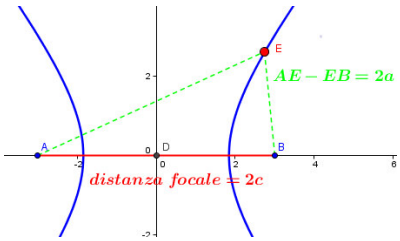
Si ottiene dall'intersezione di un piano posto parallelamente alla generatrice del cono in modo tale che l'angolo di apertura del cono sia uguale all'inclinazione del piano. La parabola è una curva aperta e il termine deriva dal greco e significa "uguagliare" che si riferisce ai due angoli sopra considerati.

Equazione della parabola con asse parallelo all'asse *y*: $y=ax^2+bx+c$

Equazione della parabola con asse parallelo all'asse *x*: $x=ay^2+by+c$

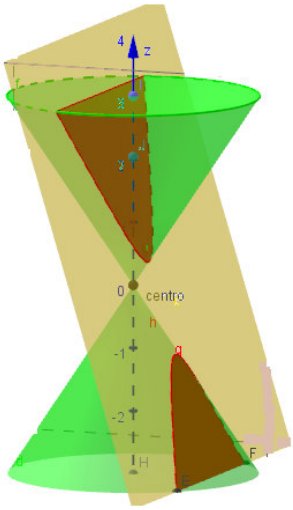


4. Iperbole



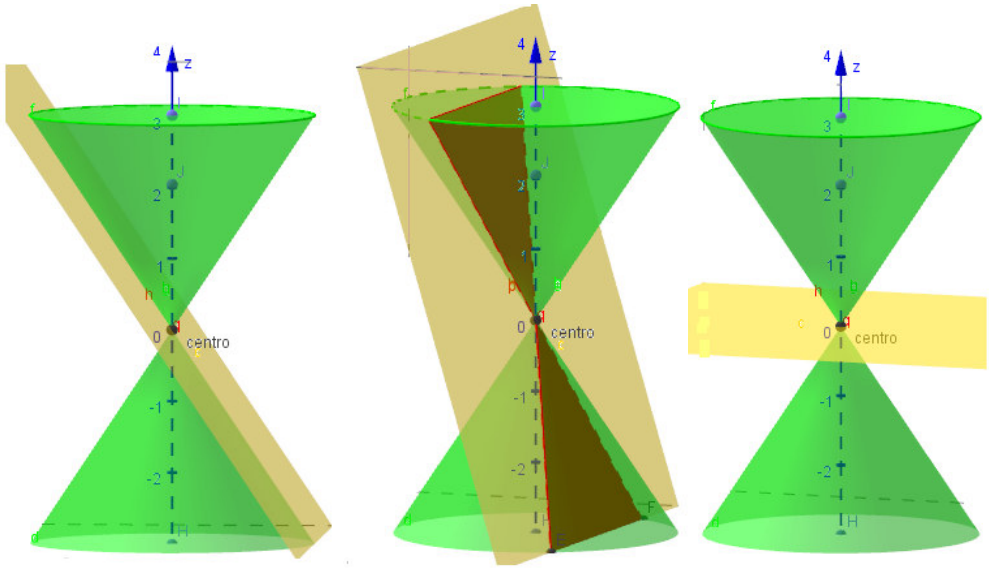
Definizione: *luogo dei punti del piano per i quali è costante la differenza da due punti fissi detti* fuochi.

Si ottiene quando il piano interseca la superficie conica in tutte e due le parti di cui è composto il cono e l'apertura del cono è maggiore dell'inclinazione del piano. Si tratta di una curva formata da due rami distinti e per la sua origine, il termine "iperbole" viene anch'esso dal greco e significa "oltrepassare" e richiama proprio il fatto che l'angolo d'apertura oltrepassa l'angolo tra il piano e l'asse.



Equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse *x*	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
Equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse *y*	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$
Equazione dell'iperbole equilatera	$x^2-y^2=a^2$
Equazione dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti	$x\cdot y=k$
Equazione dell'iperbole traslata con $\vec{v}=(p;q)$	$\frac{(x-p)^2}{a^2}-\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$
Equazione della funzione omografica	$y=\frac{ax+b}{cx+d}$

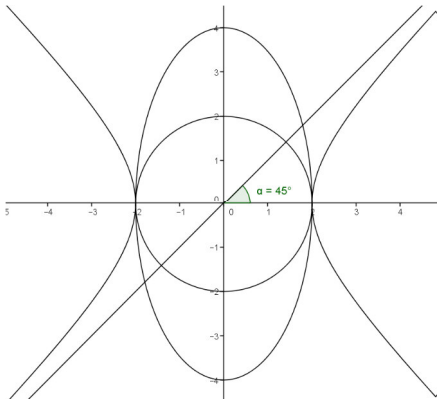
Inoltre si parla di **coniche degeneri** quando il piano che seziona il cono passa per il vertice del cono stesso. Se si verifica tale situazione *la circonferenza e l'ellisse degenerano in un punto, la parabola degenera in una retta che corrisponde alla stessa generatrice e l'iperbole degenera in una coppia di rette che si intersecano nel vertice.*


z
centro
z
centro
z
centro

Svolgimento esercizi

Attività numero 1:

Scrivi le equazioni delle tre coniche rappresentate nell'immagine e motiva brevemente le tue scelte. Individua altresì eventuali simmetrie assiali o centrali.



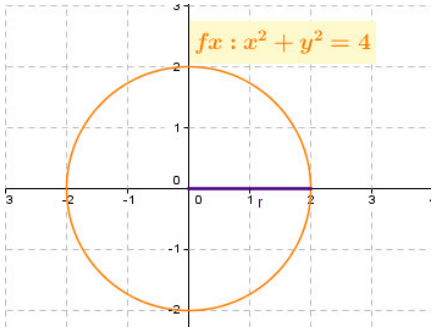
Risoluzione:

Nella figura proposta sono raffigurate tre coniche ed in particolare una circonferenza avente centro nell'origine degli assi cartesiani, un'ellisse con l'asse maggiore coincidente con l'asse y e un'iperbole equilatera con i fuochi sull'asse x.

Dato che l'obbiettivo è quello di trovare le equazioni delle singole coniche e le simmetrie a cui esse sono soggette, per rendere più comprensibile lo svolgimento, analizzo separatamente ogni singolo caso.

1. La circonferenza

Analizzando visivamente la figura ho notato che essa ha centro in O (0,0), e dunque nell'equazione generale di una circonferenza che è $x^2+y^2+ax+by+c=0$, i termini a e b sono uguali a zero e l'equazione generica si riduce nella forma: $x^2+y^2+c=0$. Inoltre sapendo che in questo caso $r=\sqrt{-c} \rightarrow r^2=-c$ e il raggio della circonferenza è 2, l'equazione diviene:

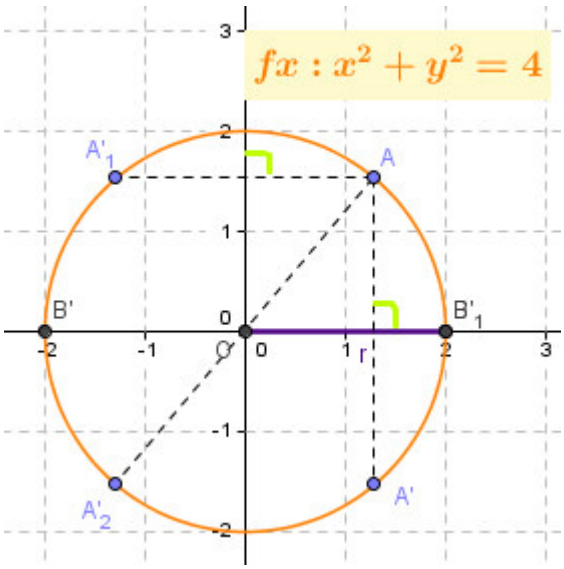


$$x^2+y^2=-c \rightarrow x^2+y^2=r^2 \longrightarrow x^2+y^2=2^2 \rightarrow x^2+y^2=4$$

Dunque l'equazione della circonferenza rappresentata è:

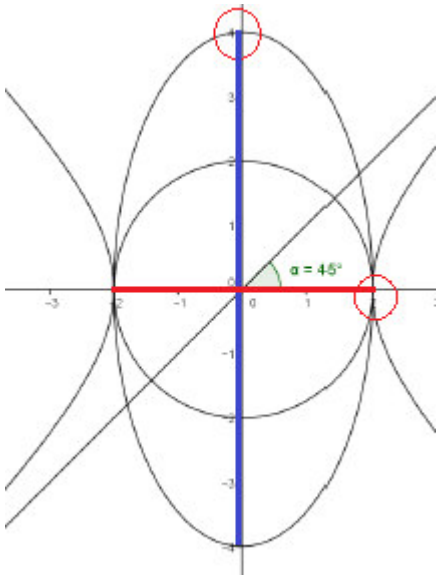
$x^2+y^2=4$ e si tratta di una figura geometrica avente infinite simmetrie assiali e una simmetria centrale.

Verifico l'equazione trovata riportando il grafico di tale equazione costruito con il software Geogebra.



2. L'ellisse

La seconda figura rappresentata nell'immagine della consegna è un'ellisse che ha i fuochi sull'asse *y*, asse che coincide con l'**asse maggiore**, mentre l'**asse minore** si trova sull'asse *x*; pertanto $b>a$. Inoltre si può osservare che *a* il cui temine costituisce la lunghezza del semiasse minore è $a=2$, mentre *b* che corrisponde alla lunghezza del semiasse maggiore è: $b=4$.

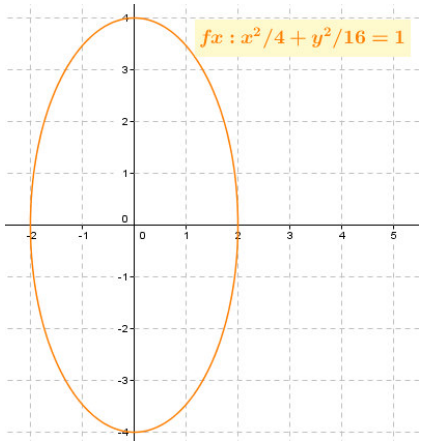


Dato che l'equazione generale dell'ellisse è:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, sostituendo i valori ai coefficienti *a* e *b* si ottiene la seguente equazione:

$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{4^2}=1 \rightarrow soluzione: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$$

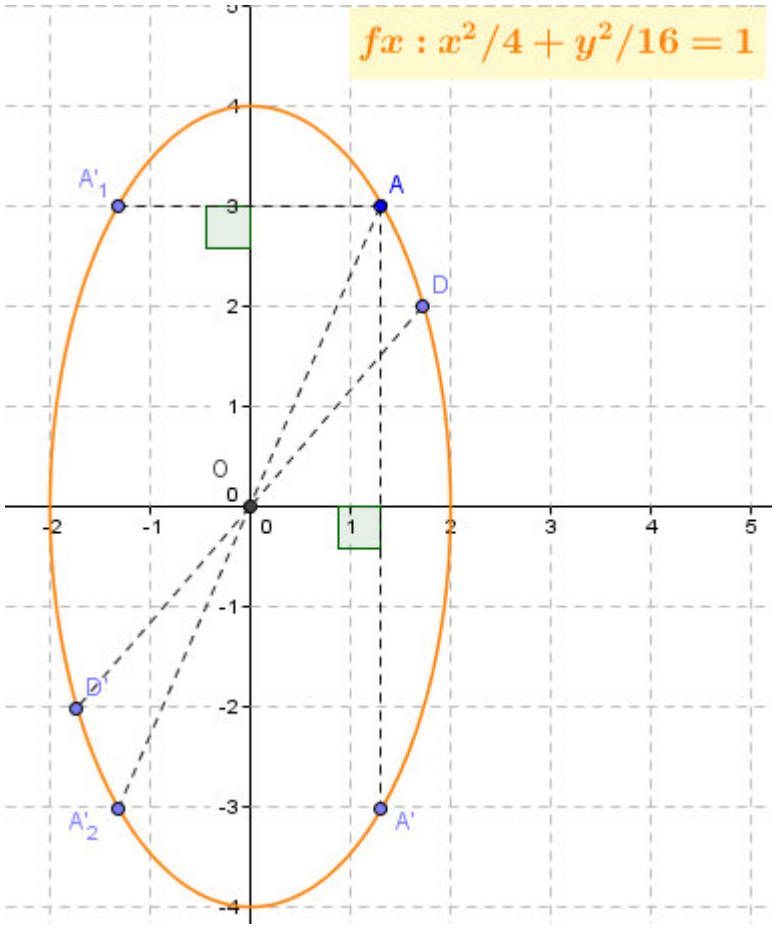
Il grafico dell'equazione trovata è questo a lato che coincide perfettamente con quello proposto nella traccia.



Le simmetrie presenti nell'ellisse

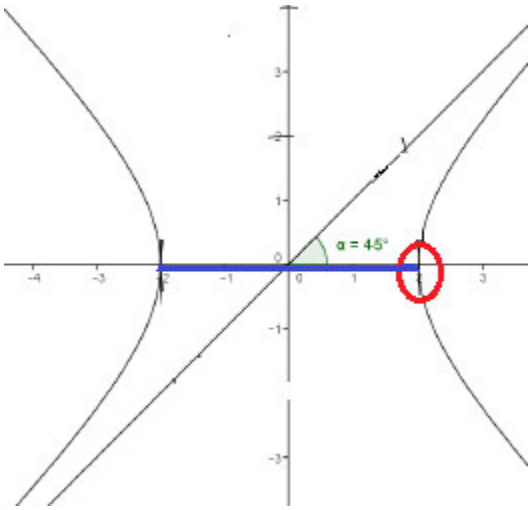
Dal punto di vista geometrico l'ellisse ha come asse di simmetria l'asse *y*, l'asse *x*, e come centro di simmetria l'origine degli assi cartesiani. Verifico quanto detto costruendo i tre tipi di simmetria citati partendo dall'immagine dell'ellisse. Riporto quanto detto nell'immagine a destra.

Come si può notare esplicitamente il punto A è il simmetrico di A′ rispetto l'asse *x*, di A'_1 rispetto all'asse *y* ed infine è simmetrico ripetto all'origine nel punto A'_2.



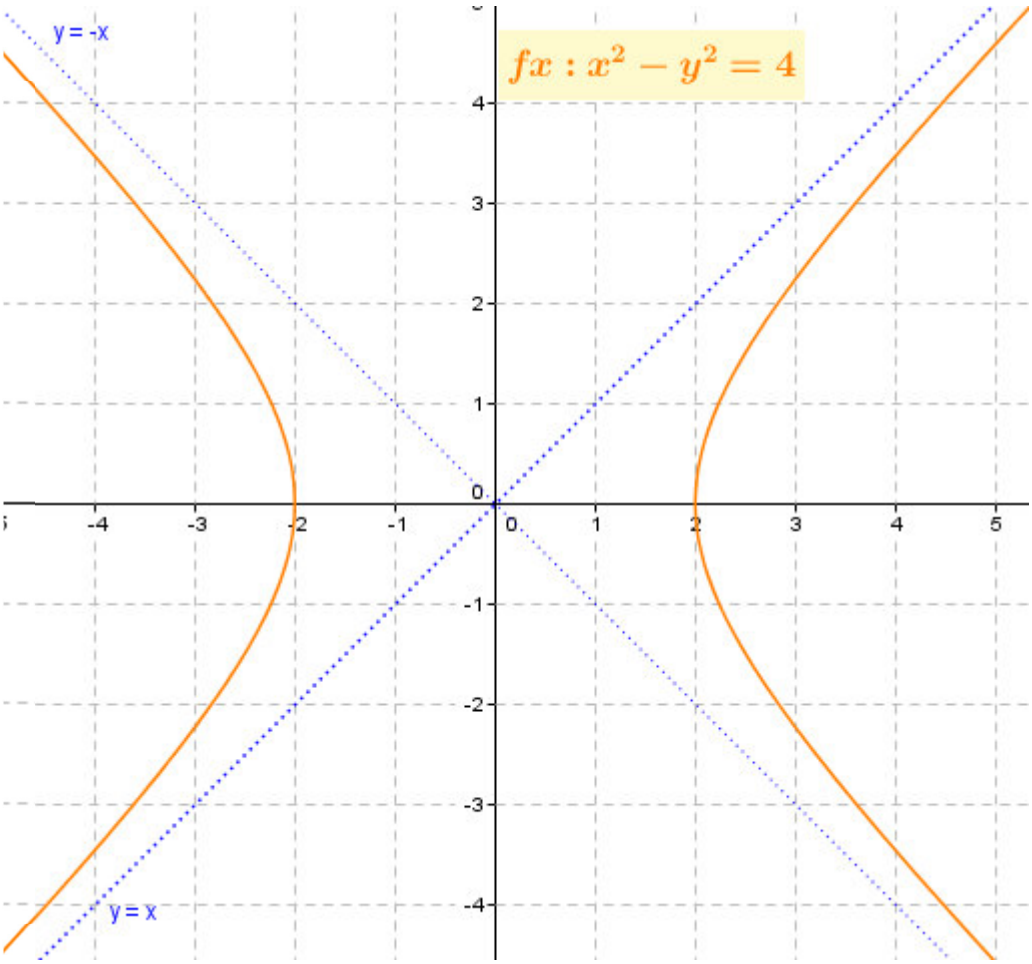
3. Iperbole

Per quanto riguarda l'iperbole scrutando bene il grafico di partenza posso trarre alcuni indizi che si rivelano fondamentali per giungere all'equazione della curva. Ad esempio dalla rappresentazione posso capire che il secondo membro dell'equazione generica è positivo dato che i fuochi si trovano sull'asse *x*. Inoltre sapendo che l'asintoto ha inclinazione di 45° rispetto all'asse *x*, tale retta che accompagna la curva all'infinito, rappresenta la bisettrice del I e III quadrante, e un'iperbole i cui asintoti sono le bisettrici del piano cartesiano prende la denominazione di *iperbole equilatera* pertanto l'equazione generica è: $x^2 - y^2 = a^2$.



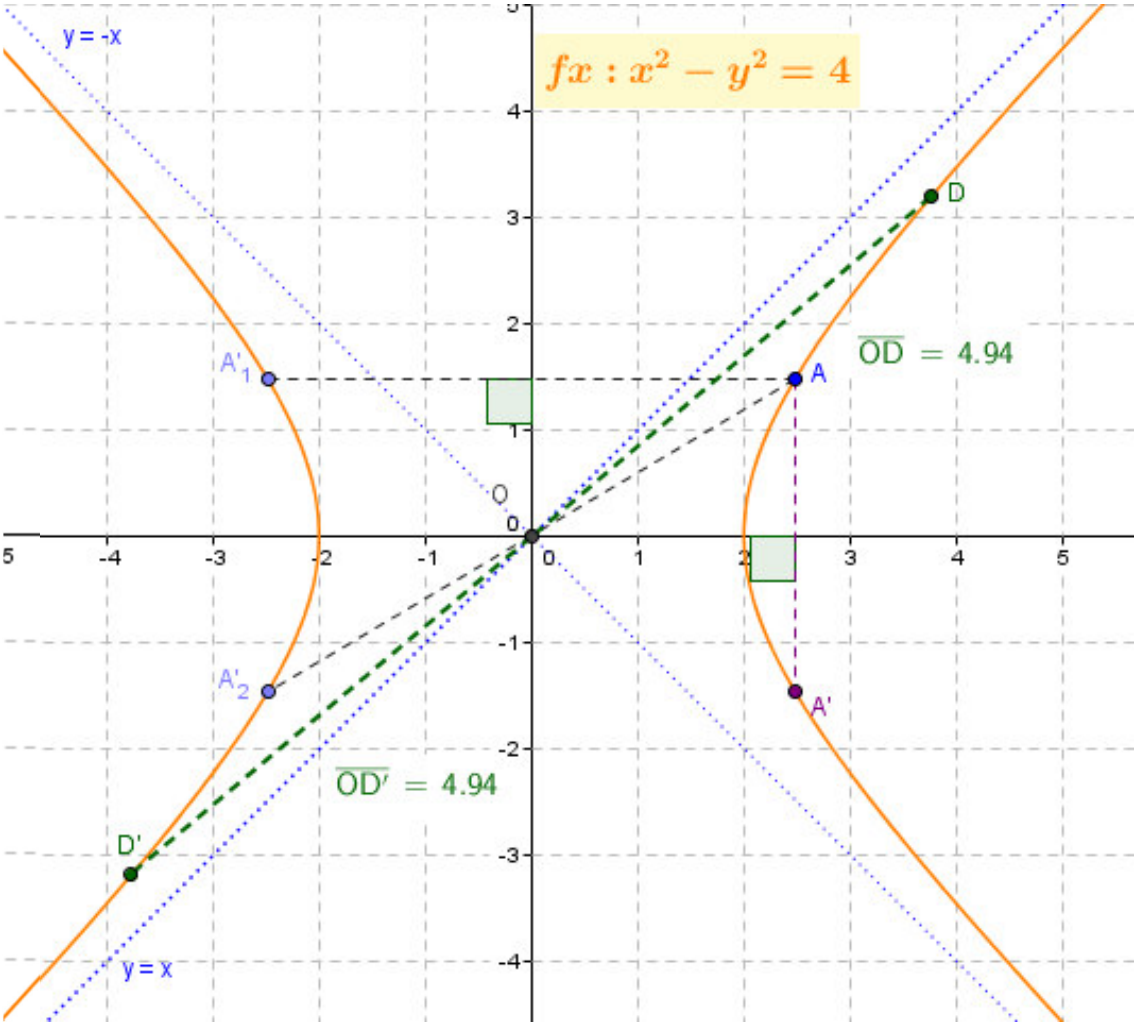
L'unica incognita è il termine *a* che però rappresenta la metà dell'**asse trasverso**, ovvero il segmento delimitato dai due vertici reali che sono l'intersezione tra la curva e l'asse *x* che in questo caso vale 4 unità.

Dunque sapendo che *a = 2,* l'equazione dell'iperbole rappresentata è $x^2 - y^2 = 4$.



Le simmetrie presenti nell'iperbole

Dal punto di vista geometrico l'iperbole è una curva simmetrica rispetto all'asse *x*, all'asse *y* e all'origine. Come nell'esercizio precedente verifico quanto detto costruendo i tre tipi di simmetria come riportato nell'immagine seguente.

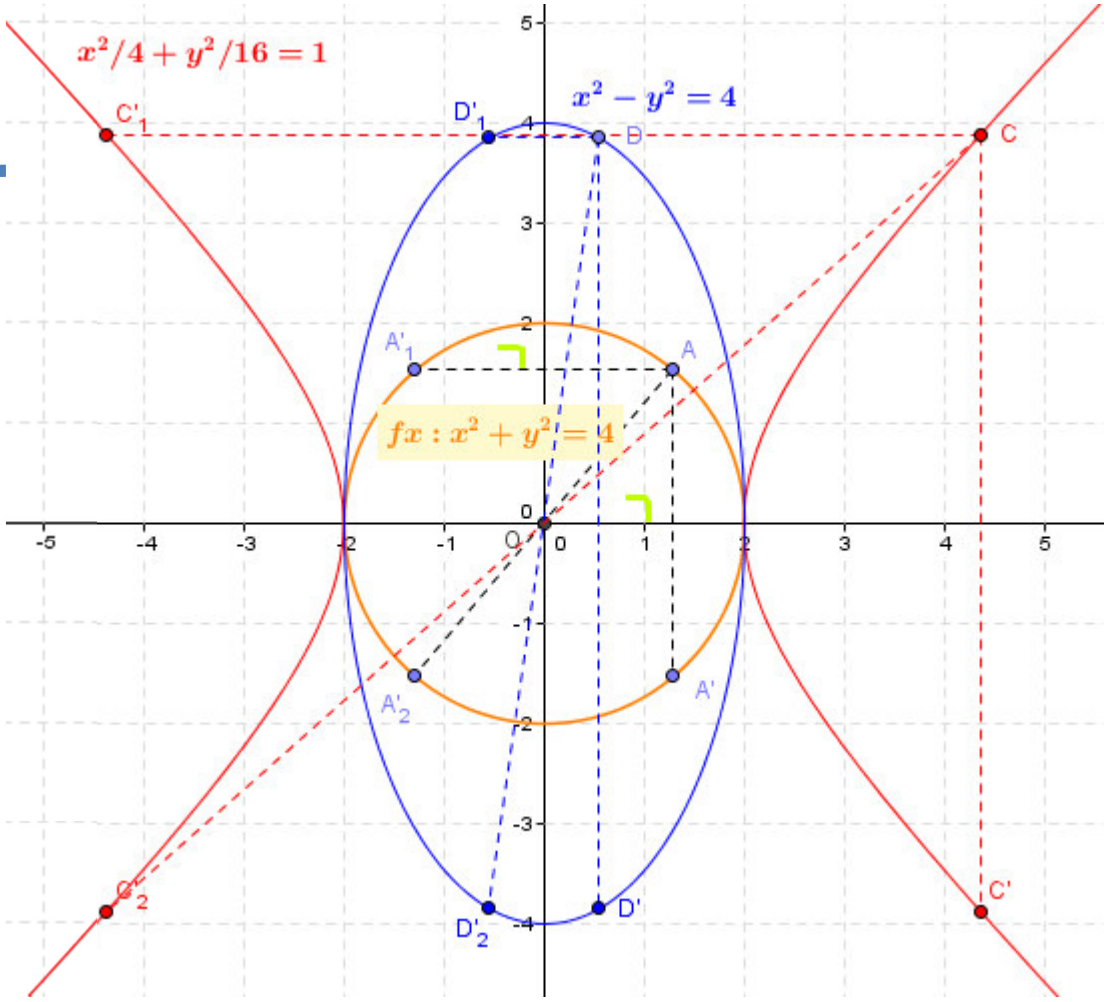


In questo modo si può individuare subito che il punto A è il simmetrico di A´ rispetto l'asse *x*, di A'_1 rispetto all'asse *y* ed infine è simmetrico ripetto all'origine nel punto A'_2.

Riporto le soluzioni di questa prima attività in una tabella riassuntiva

	Tipo di conica	equazione	simmetrie
1. Prima conica	Circonferenza	$x^2+y^2=4$	Infinite simmetrie assiali + simmetria centrale con centro di simmetria l'origine degli assi cartesiani.
2. Seconda conica	Ellisse	$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$	Simmetria assiale con assi di simmetria l'asse *x* e l'asse *y*. + simmetria centrale con centro di simmetria l'origine degli assi cartesiani.
3. Terza conica	Iperbole equilatera	$x^2-y^2=4$	Simmetria assiale con assi di simmetria l'asse *x* e l'asse *y*. + simmetria centrale con centro di simmetria l'origine degli assi cartesiani.

Rappresentazione delle simmetrie con Geogebra



Osservazioni:

Ogni punto appartenente ad una delle tre coniche ha un corrispondente punto simmetrico che può scaturire sia da una simmetria assiale che centrale in quanto eseguendo due

simmetrie assiali con assi perpendicolari, una dopo l'altra, si ottiene una simmetria centrale che ha come centro l'intersezione dei due assi.

Attività numero 2:

Data l'equazione parametrica $(4k^2-1)x^2+(6k-3)y^2=k$, stabilire per quali valori di k

1. L'equazione rappresenta una circonferenza;
2. L'equazione rappresenta un'iperbole;
3. La curva è un'ellisse con l'asse maggiore sull'asse delle ordinate.

Risoluzione:

1. La circonferenza

obbiettivo: dal fascio di coniche estrarre l'equazione che rappresenta una circonferenza.

Svolgimento:

per avere l'equazione di una circonferenza è necessario che ci siano due termini x e y di secondo grado, e inoltre che i loro coefficienti (dei due termini) siano tra loro uguali, dunque per sottrarre dal fascio l'equazione della circonferenza occorre uguagliare tra di loro i coefficienti dell'x^2 e y^2:

$$(4k^2-1)=(6k-3)$$
$$4k^2-1-6k+3=0$$
$$4k^2-6k+2=0$$
$$\frac{\Delta}{4}=\left(-\frac{b}{2}\right)^2-ac \Rightarrow \frac{\Delta}{4}=9-8=1$$
$$k_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} \Rightarrow k_{1,2}=\frac{3\pm1}{4}$$
$$k_1=\frac{3-1}{4} \rightarrow k_1=\frac{1}{2}$$
$$k_2=\frac{3+1}{4} \rightarrow k_2=1$$

In questo modo ho trovato i due valori di k, che sostituiti nel fascio individuano le equazioni delle circonferenze.

1° circonferenza: $k = 1/2$

$$(4k^2-1)x^2+(6k-3)y^2=k \rightarrow \left(4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-1\right)x^2+\left(6\cdot\frac{1}{2}-3\right)y^2=\frac{1}{2}$$
$$\left(4\cdot\frac{1}{4}-1\right)x^2+(3-3)y^2=\frac{1}{2}$$
$$(1-1)x^2+(0)y^2=\frac{1}{2}$$
$$0x^2+0y^2=\frac{1}{2}$$
$$0=\frac{1}{2} \qquad falso$$

Se $k=1/2$ la circonferenza non esiste

2° circonferenza: $k=1$

$$(4k^2-1)x^2+(6k-3)y^2=k \rightarrow (4\cdot 1^2-1)x^2+(6\cdot 1-3)y^2=1$$
$$(4-1)x^2+(6-3)y^2=1$$
$$3x^2+3y^2=1$$

2. L'iperbole

obbiettivo: dal fascio di coniche estrarre l'equazione che rappresenta un'iperbole.

Svolgimento:

l'equazione di un'iperbole è caratterizzata da due termini x^2 e y^2 i cui coefficienti sono discordi, dunque uno è positivo e l'altro è necessariamente negativo per la natura stessa dell'iperbole. Pertanto dividendo tutto il fascio per *k* il cui valore è variabile, al secondo membro è possibile ottenere sia +1 sia -1 e in entrambi i casi si tratta di un'iperbole. Ciò che deve però restare costante è la discordanza dei segni dei coefficienti dei termini di grado 2.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=+1 \wedge \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \rightarrow \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

In altre parole si può affermare che il prodotto tra il primo e secondo coefficiente deve essere sempre negativo e non importa quale dei due termini sia negativo perché ciò non influisce sull'esistenza dell'iperbole, ma solo sulla rappresentazione grafica, infatti, se il secondo membro è +1 si avrà un'iperbole con i fuochi sull'asse *x*, mentre se l'equazione è uguale a -1, si avrà un'iperbole con i fuochi sull'asse *y*. Per quanto detto la condizione da porre affinché si ottenga l'equazione dell'iperbole è la seguente: $\frac{1}{a^2}*\frac{1}{b^2}<0$. Dato che il fascio è $(4k^2-1)x^2+(6k-3)y^2=k$ applico innanzitutto il secondo principio di equivalenza:

$$\frac{(4k^2-1)}{k}x^2+\frac{(6k-3)}{k}y^2=\frac{k}{k} \rightarrow \frac{(4k^2-1)}{k}x^2+\frac{(6k-3)}{k}y^2=1$$

A questo punto si può impostare precisamente la condizione necessaria:

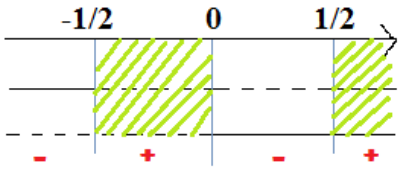
$$\frac{(4k^2-1)}{k}=\frac{1}{a^2};\frac{(6k-3)}{k}=\frac{1}{b^2} \rightarrow \frac{(4k^2-1)}{k}*\frac{(6k-3)}{k}<0$$

$$\frac{(4k^2-1)}{k}*\frac{(6k-3)}{k}<0 \rightarrow \frac{(4k^2-1)}{k}>0$$
$$\frac{(6k-3)}{k}>0$$

Risolvo la disequazione risultante ponendo ogni fattore maggiore di zero e cercando poi le soluzioni negative tramite il grafico dei segni. [1]

$1°\,disequazione:$

$$N>0 \rightarrow 4k^2-1>0 \rightarrow k^2>\frac{1}{4} \rightarrow k_{1,2}=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow k<-\frac{1}{2} \vee k>\frac{1}{2}$$
$$D>0 \rightarrow k>0$$



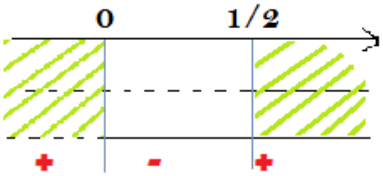
$$-\frac{1}{2}<k<0 \vee k>\frac{1}{2}$$

[1] Le soluzioni della disequazione sono esterne dato che il segno di *a* è concorde con il segno della disequazione.

$2°disequazione:$

$N > 0 \rightarrow 6k - 3 > 0 \rightarrow k > \frac{1}{2}$

$D > 0 \rightarrow k > 0$

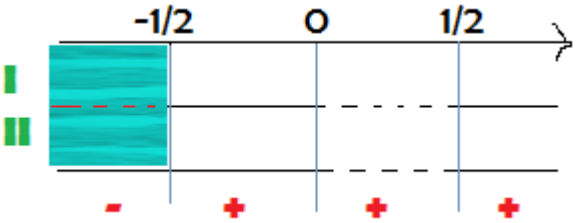


$k < 0 \vee k > \frac{1}{2}$

Dopo aver trovato le soluzioni dei due fattori, calcolo la soluzione di tutta la disequazione facendo il grafico dei segni:

$1°disequazione: -\frac{1}{2} < k < 0 \vee k > \frac{1}{2}$

$2°disequazione: k < 0 \vee k > \frac{1}{2}$



Soluzione e conclusione:

$$\frac{(4k^2-1)}{k} * \frac{(6k-3)}{k} < 0 \Rightarrow k < -\frac{1}{2}$$

Dai calcoli svolti è emerso che affinché l'equazione parametrica possa individuare l'equazione di un'iperbole occorre che $k < -\frac{1}{2}$.

NB: vedi rappresentazione a fine attività

3. Ellisse

obbiettivo: dal fascio di coniche estrarre l'equazione che rappresenta un'ellisse con l'asse maggiore sull'asse delle ordinate.

Dato il fascio di equazione $(4k^2-1)x^2 + (6k-3)y^2 = k$ e sapendo che un'ellisse ha equazione $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ applico il secondo principio di equivalenza dividendo tutto per k ottenendo così che il secondo membro dell'equazione è uguale ad 1.

$$\frac{(4k^2-1)}{k}x^2 + \frac{(6k-3)}{k}y^2 = \frac{k}{k} \rightarrow \frac{(4k^2-1)}{k}x^2 + \frac{(6k-3)}{k}y^2 = 1$$

Ora pongo le condizioni necessarie affinché sia raggiunto l'obiettivo.

Innanzitutto dato che $\frac{(4k^2-1)}{k} = \frac{1}{a^2}$ e $\frac{(6k-3)}{k} = \frac{1}{b^2}$ i termini a^2 e b^2 saranno:

$\frac{k}{4k^2-1} = a^2$ e $\frac{k}{6k-3} = b^2$. Per la stessa natura dell'ellisse i coefficienti dei termini di secondo grado devono essere maggiori di zero e così le due prime condizioni saranno:

$\frac{k}{4k^2-1} > 0 \vee \frac{k}{6k-3} > 0$. Inoltre dato che si chiede di calcolare il parametro k in funzione di una situazione in particolare, che l'ellisse abbia l'asse maggiore sull'asse dell'ordinate è

necessario porre la condizione che b^2 sia più grande di a^2 dunque $\frac{k}{6k-3} > \frac{k}{4k^2-1}$. Di conseguenza la risposta all'esercizio è data dalla soluzione del sistema seguente formato dalle tre disequazioni sopracitate.[2]

$$\begin{cases} \frac{k}{4k^2-1} > 0 \rightarrow -\frac{1}{2} < k < 0 \vee k > \frac{1}{2} \\ \frac{k}{6k-3} > 0 \rightarrow k < 0 \vee k > \frac{1}{2} \\ \frac{k}{6k-3} > \frac{k}{4k^2-1} \end{cases}$$

Risolvo la III disequazione:

$$\frac{k}{6k-3} - \frac{k}{4k^2-1} = 0$$

$$\frac{k(4k^2-1)-k(6k-3)}{(6k-3)(4k^2-1)} > 0$$

minimo comune multiplo dei denominatori

$$\frac{4k^3-k-6k^2+3k}{24k^3-6k-12k^2+3} > 0 \rightarrow \frac{4k^3-6k^2+2k}{24k^3-12k^2-6k+3} > 0$$

$$\frac{2k(2k^2-3k+1)}{12k^2(2k-1)-3(2k-1)} > 0 \rightarrow \frac{2k(2k^2-3k+1)}{(2k-1)(12k^2-3)} > 0$$

Numeratore: raccoglimento a fattor comune
Denominatore: raccoglimento per parti.

N>0

$$2k(2k^2-3k+1) > 0 \rightarrow$$

1 $2k > 0 \Rightarrow k > 0$

$2k^2-3k+1 > 0$

$2k^2-3k+1 = 0$ Equazione associata

$\Delta = 9-8 = 1$

$k_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{4} \rightarrow k_1 = \frac{1}{2} \vee k_2 = 1$

2 $2k^2-3k+1 > 0 \rightarrow k < \frac{1}{2} \vee k > 1$

Grafico dei segni:

$0 < k < \frac{1}{2} \vee k > 1$

D>0

$$(2k-1)(12k^2-3) > 0 \rightarrow$$

1 $2k-1 > 0 \Rightarrow k > \frac{1}{2}$

$12k^2-3 > 0$

$12k^2-3 = 0$ Equazione associata

$k^2 = \frac{3}{12} \Rightarrow k^2 = \frac{1}{4}$

$k_{1,2} = \pm\frac{1}{2} \rightarrow k_1 = -\frac{1}{2} \vee k_2 = \frac{1}{2}$

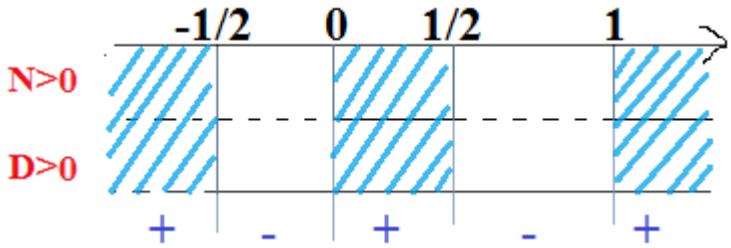
2 $2k^2-3k+1 > 0 \rightarrow k < -\frac{1}{2} \vee k > \frac{1}{2}$

Grafico dei segni:

$k > -\frac{1}{2}$

[2] Per la prima e seconda disequazione riporto solo il risultato senza svolgere i calcoli siccome sia la prima che la seconda, anche se al contrario, sono state svolte nel punto 2.

Soluzione III disequazione: grafico dei segni



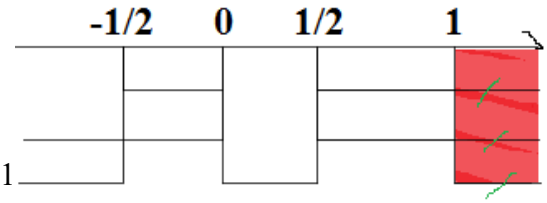
Soluzione:

$$soluzione: k > 1 \vee k < -\frac{1}{2} \vee 0 < k < \frac{1}{2}$$

Dopo aver trovato le soluzioni delle tre disequazioni calcolo la soluzione di tutto il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{4k^2-1}{k} > 0 \rightarrow -\dfrac{1}{2} < k < 0 \vee k > \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{6k-3}{k} > 0 \rightarrow k < 0 \vee k > \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{k}{6k-3} > \dfrac{k}{4k^2-1} \rightarrow k < -\dfrac{1}{2} \vee 0 < k < \dfrac{1}{2} \vee k > 1 \end{cases}$$

Grafico delle linee sovrapposte



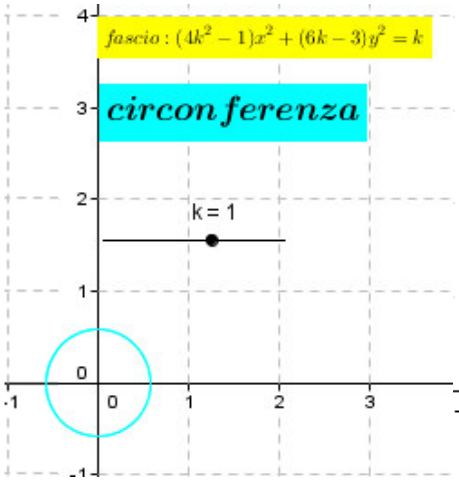
Conclusione:

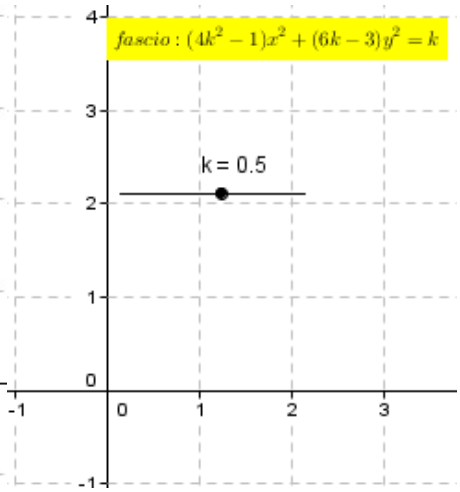
Dopo aver svolto i calcoli necessari è emerso che affinché l'equazione parametrica $(4k^2-1)x^2+(6k-3)y^2=k$ si riduca all'equazione di un'ellisse con l'asse maggiore sull'asse delle ordinate è necessario che $k>1$

Riporto le soluzioni di questa seconda attività in una tabella riassuntiva.

Equazione parametrica $(4k^2-1)x^2+(6k-3)y^2=k$	
k=1	Circonferenza
k>1	Ellisse con asse maggiore sull'asse delle ordnate
k<-1/2	Iperbole

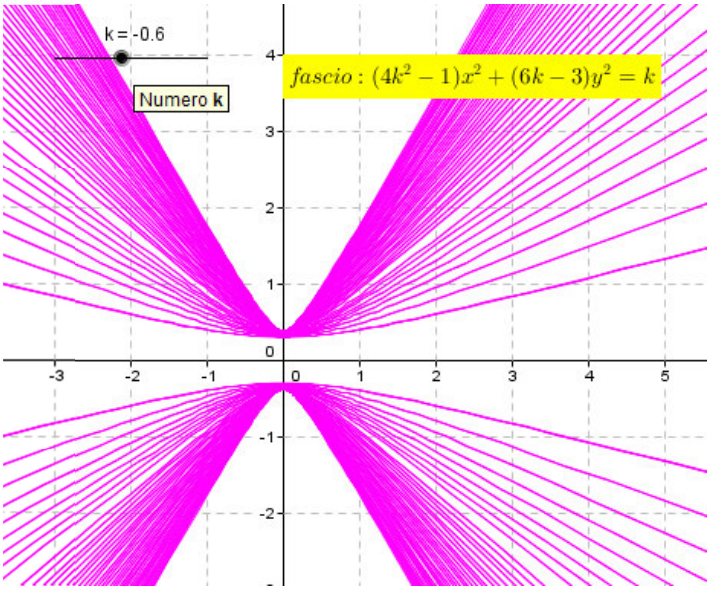
Grafico con geogebra





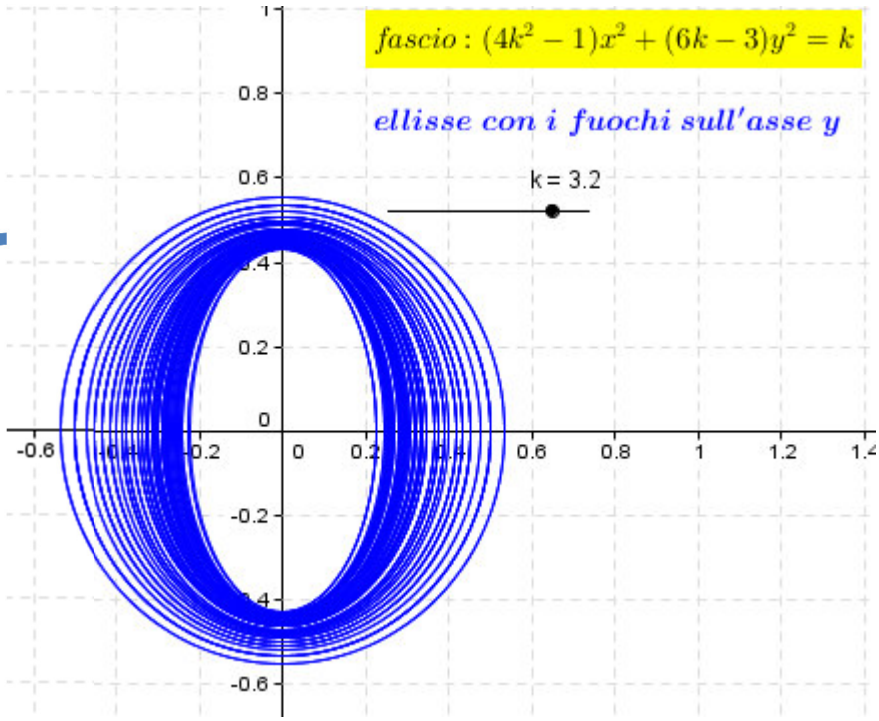
Osservazioni:

dall'osservazione delle due immagini a lato è possibile ottenere una conferma di quanto emerso facendo i calcoli: se $k=1$ si ha l'equazione di una circonferenza, ma se $k=1/2$ non si ha alcuna conica.



Descrizione:

Le linee colorate in viola rappresentano le curve delle funzioni che si ottengono quando k assume valori minori e diversi di -1/2. In questo caso si tratta sempre di iperboli.



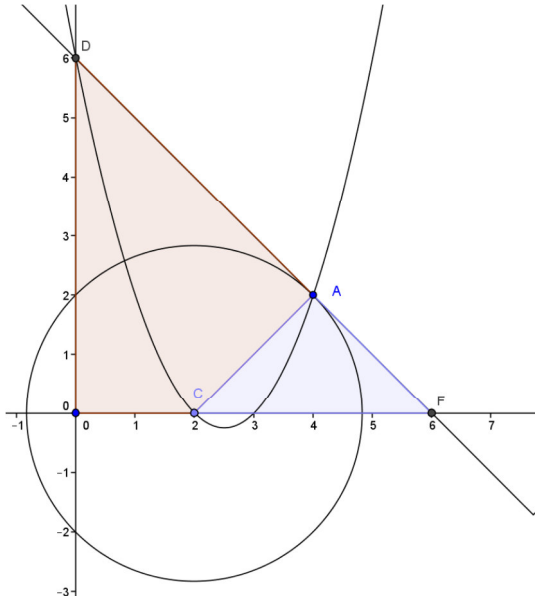
Descrizione:

Le linee colorate in blu rappresentano le curve delle funzioni che si ottengono quando k assume valori maggiori e diversi da 1. In questo caso si tratta sempre di un'ellisse con l'asse maggiore sull'asse delle ordinate.

Attività numero 3:

Osserva bene il grafico. Sapendo che A ha coordinate A (4,2) determina:

1. L'equazione della parabola;
2. L'equazione della circonferenza;
3. L'equazione della retta tangente alla circonferenza nel punto A;
4. Verificare che il rapporto tra l'area del quadrilatero e quella del triangolo è pari a 7/2.



Svolgimento:

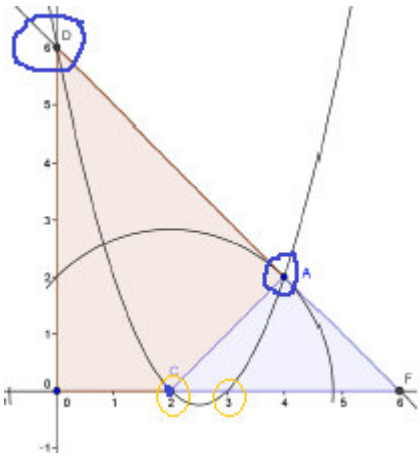
I. Equazione della parabola

Come prima azione individuo l'equazione della parabola rappresentata in figura. Per giungere alla soluzione si possono utilizzare diversi metodi, il primo sfrutta gli zeri della funzione, mentre il secondo metodo fa riferimento alle tre condizioni necessarie e sufficienti affinché si conoscano i tre parametri: *a, b* e *c*.

Utilizzo il primo metodo poiché in matematica occorre seguire il procedimento giusto che ci porta in minor tempo alla soluzione, da poter essere così considerato la strada più efficiente.

1°metodo:

Si definiscono zeri di una funzione quei valori che sostituiti alla *x* dell'equazione danno come risultato *y = 0*, e dal punto di vista grafico corrispondono all'intersezione tra l'asse delle ascisse e la curva. Dunque in questo caso gli zeri della funzione sono:



$$x_1 = 2 \wedge x_2 = 3$$

$$(x-2)(x-3) = 0$$

$$equazione: y = x^2 - 5x + 6$$

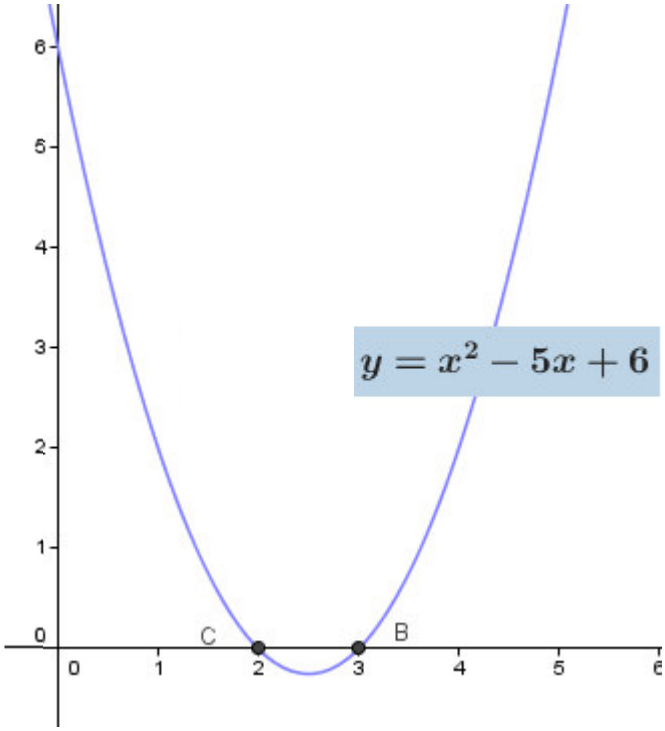
2°metodo:

in questo caso occorrono individuare tre indizi, ognuno dei quali corrisponde ad una condizione per ricercare il valore dei tre coefficienti. Le tre condizioni corrispondono alle tre *condizioni di appartenenza* alla curva dei punti A(4,2), D(0,6) e C(2,0), che sono evidenziati nella figura. Così ogni punto appartiene alla curva se soddisfatta la condizione di appartenenza. Infine l'equazione della parabola è scaturita dal sistema tra le tre equazioni.

Condizione di appartenenza: sostituisco le coordinate dei tre punti alla x e y dell'equazione generale: $ax^2 + bx + c = y$

$$\begin{cases} A(4,2) \rightarrow a4^2 + b\cdot 4 + c = 2 \\ D(0,6) \rightarrow a\cdot 0 + b\cdot 0 + c = 6 \\ C(2,0) \rightarrow a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 16a + 4b + c = 2 \\ c = 6 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

Rappresentazione grafica dell'equazione trovata



Osservando l'immagine a fianco si nota che la curva intercetta l'asse delle ascisse nei punti C e B di coordinate 2,0 e 3,0 così come è emerso dall'analisi della rappresentazione fornita nella traccia. Pertanto l'equazione trovata è quella esatta.

II. Equazione della circonferenza

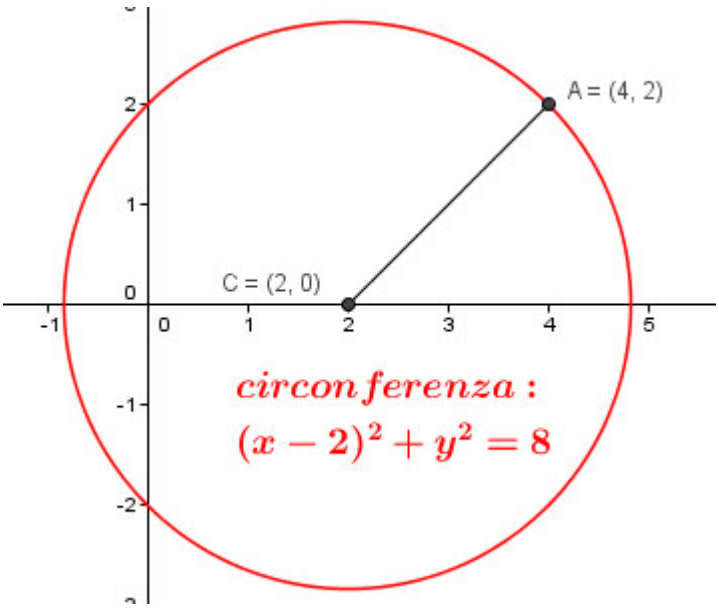
Per determinare l'equazione di una circonferenza, così come per la parabola, occorre conoscere tre informazioni geometriche, indipendenti tra loro, dette condizioni. Una delle condizioni possibili è quella proposta nel grafico: si conosce il centro della circonferenza che corrisponde a due condizioni e si conosce le coordinate di un punto che appartiene alla circonferenza. In questo caso il centro è C (2,0) e il punto che appartiene alla curva è il punto A (4,2), l'equazione della circonferenza è data dal seguente metodo:

1. <u>Teorema di Pitagora per conoscere la lunghezza del raggio</u>

$$(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 = r^2$$
$$(4-2)^2 + (2-0)^2 = r^2$$
$$4+4 = r^2$$
$$r^2 = 8$$

2. Sostituisco il valore di r^2 nell'<u>equazione cartesiana</u> della circonferenza per giungere a quella canonica:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2 \rightarrow$$
$$(x-2)^2 + (y-0)^2 = 8$$
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 8$$



Ciò implica che l'equazione della circonferenza rappresentata è: $x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0$

III. Equazione della retta tangente alla circonferenza nel punto A.

è noto che una retta è tangente in ogni punto ad una circonferenza, ciò significa che il raggio che congiunge il centro della circonferenza e il punto di tangenza della retta è perpendicolare alla retta stessa, dunque per determinare l'equazione della tangente si potrebbe seguire il metodo che propongo:

1. Trovare la retta passante per i punti A e C:

$$\frac{(x-x_A)}{(x_C-x_A)}=\frac{(y-y_A)}{(y_C-y_A)}\rightarrow\frac{x-4}{2-4}=\frac{y-2}{0-2}\rightarrow-\frac{x-4}{2}=-\frac{y-2}{2}$$

$$applico_il_2principio_di_equivalenza:$$

$$x-4=y-2$$

$$y=x-2$$

2. Ora so che la retta a cui appartiene il raggio della circonferenza è $y=x-2$ e dunque il coefficiente angolare della retta è +1.
3. Calcolo il fascio di rette passante per A (4,2):

$$y-y_A=m(x-x_A)\rightarrow y-2=m(x-4)$$

4. Al fascio di rette appena trovato, sostituisco l'antireciproco di m giacché le due rette sono perpendicolari tra loro:

$$condizione_di_tangenza: m=1\rightarrow m'=-1$$

$$fascio_per_A: y-2=m(x-4)$$

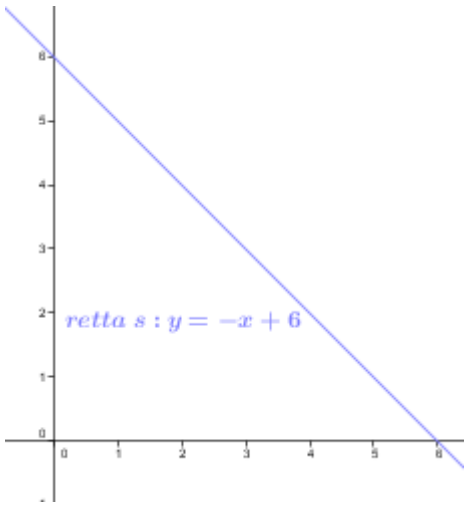
$$retta_per_A: y-2=-1(x-4)$$

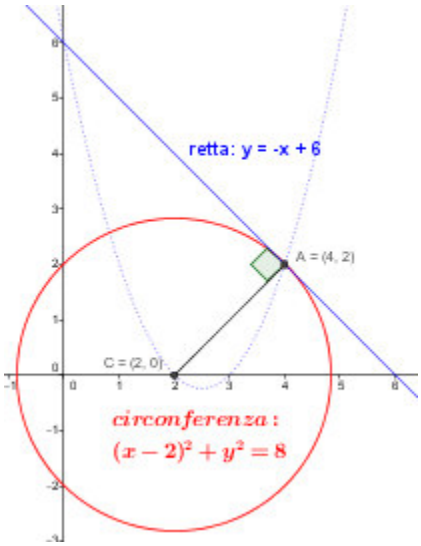
$$s: y=-x+4+6\rightarrow y=-x+6$$

5. La retta tangente alla circonferenza ha equazione:

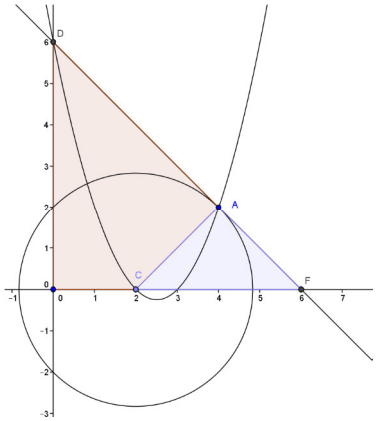
$$s: y=-x+6$$

si tratta di una retta con andamento discendente, infatti, il coefficiente angolare è negativo e incontra l'asse y in +6, infatti, il termine noto, e dunque l'intercetta della retta è 6.





IV. Rapporto tra le aree del quadrilatero e del triangolo



OBBIETTIVO: verificare che il rapporto delle aree dei due poligoni è 17/2.

Per svolgere questo punto calcolo innanzitutto l'area del triangolo colorato in azzurro sapendo che CA e AF sono due lati del triangolo, perpendicolari tra loro per quanto detto nello svolgimento del punto 3, pertanto i segmenti CA e AF si possono considerare i due cateti di un triangolo rettangolo, ma anche isoscele dato che i due cateti sono uguali. Inoltre nel punto 2 avendo trovato la lunghezza del raggio della circonferenza al quadrato ($r^2=8$), si può dedurre che $CA=2\sqrt{2}$. Calcolo allora l'area del triangolo:

$$A_t=\frac{CA*AF}{2}\rightarrow A_t=\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{2}\rightarrow A_t=\frac{4*2}{2}\rightarrow A_t=4$$

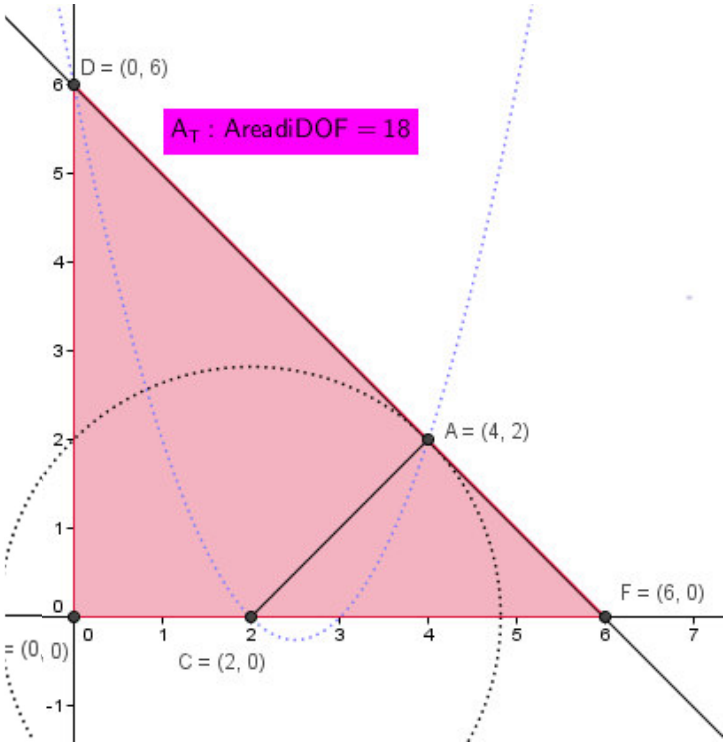
Ora calcolo l'area del quadrilatero rosa sfruttando l'equiscomponibilità dei quadrilateri, infatti, il poligono rosa è dato dall'intero triangolo DOF che contiene esso stesso -DOCA- e il triangolo CAF. Dunque calcolo la superficie di DOF sapendo che si tratta di un triangolo rettangolo isoscele di cateto DO=6.

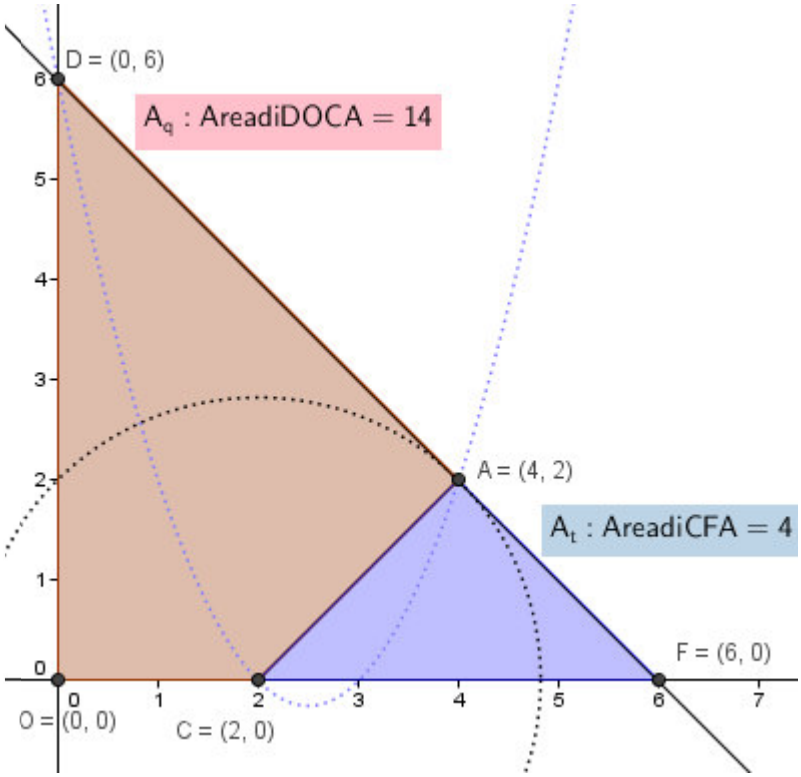
$$A_T=DO^2/2\rightarrow A_T=6^2/2\rightarrow A_T=36/2\rightarrow A_T=18$$

Come passo successivo calcolo l'area del quadrilatero A_q :

$$A_q=A_T-A_t\rightarrow A_q=18-4=14$$

Verifico quanto detto tramite una costruzione con Geogebra.





Conclusione:

In questo modo ho trovato che l'area del triangolo piccolo è 4, mentre quella del quadrilatero è 14 dunque il rapporto tra l'area del quadrilatero e l'area del triangolo è:14/4, semplificando: 7/2 come affermato nella consegna. C.v.d.

Riepilogo delle soluzioni dell'attività numero 3

Equazione della parabola	$y = x^2 - 5x + 6$
Equazione della circonferenza	$x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0$
Equazione della retta tangente alla circonferenza nel punto A	$s: y = -x + 6$
Rapporto tra l'area del quadrilatero e quella del triangolo	**7/2**

Note

Vorrei ringraziare la prof.ssa Antonietta Iemma per avermi aiutato nella produzione manuale per la realizzazione del modello 3D di un cono a due falde.

Allego a questo documento un file di Geogebra in cui è realizzata una presentazione inerente alle sezioni coniche ed in più lo svolgimento della seconda attività *"progetto probl.2"*.

le sezioni coniche con geogebra.ggb

progetto probl. 2.ggb

Fine

Alunna

Marianna Angiolelli IVA

Insegnante

Luigi Boscaino