Laboratorio di matematica

Attività progettuale

Eccoti in sostanza la mia regola: comportati con gli inferiori come vorresti che i superiori si comportassero con te. Ogniqualvolta ti verrà in mente quanto grande sia il potere che tu hai sul tuo schiavo, ti venga pure in mente che altrettanto è il potere del tuo padrone su di te.

Seneca, *Epistulae morales ad Lucilium*

A coloro che sanno ancora dire Grazie.

Prefazione

Ho concepito questo lavoro come due percorsi paralleli: il primo, di colore bianco, è lo svolgimento canonico e lineare di un compito assegnato, e l'altro è di colore verde, ed è un approfondimento di quanto espresso nel suo complementare bianco.

Ognuno di essi occupa una metà della pagina A4, sono separati da un netto taglio e da un colore diverso, ma senza l'uno o l'altro, la pagina non è più tale, a testimonianza che ogni piccola perla di matematica non può essere tralasciata o pensare benché minimo che non possa servire.

Ho lavorato con l'obbiettivo di essere originale, e che questo progetto potesse risultare il più chiaro e comprensibile possibile, per questo mi scuserete qualche ripetizione.

Il giudizio spetta a voi e di conseguenza, non mi resta che augurarvi una buona lettura!

Foglianise, 31/03/2015

Marianna Angiolelli V A

Indice

Traccia I

Svolgimento consegna n. 1 ..... pag. 1

Il dominio di una funzione ..... pag. 1A

Svolgimento consegna n. 2 ..... pag. 2

Funzione: pari o dispari? ..... pag. 2A

Svolgimento consegna n. 3 ..... pag. 3

Gli asintoti ..... pag. 5A

Svolgimento consegna n. 4 ..... pag. 6

Funzione invertibile? ..... pag. 8A

Svolgimento consegna n. 5 ..... pag. 8

Svolgimento consegna n. 6 ..... pag. 10

Svolgimento consegna n. 7 ..... pag. 12

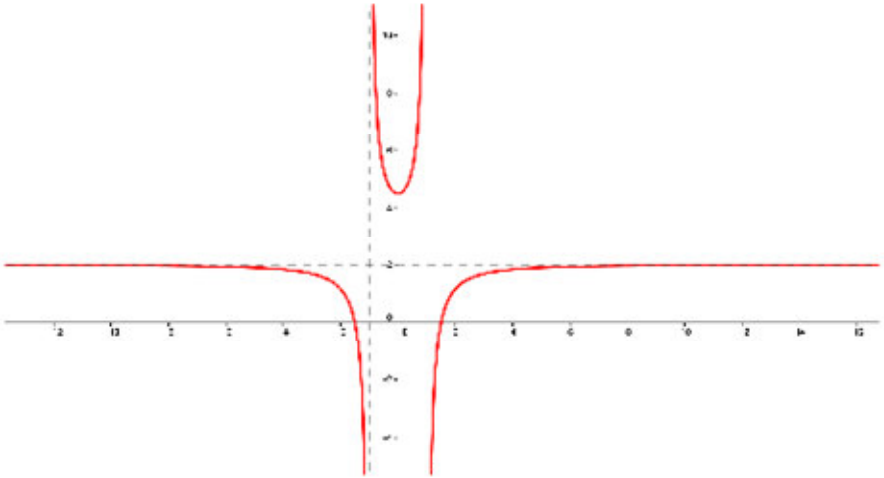
Svolgimento consegna n. 8 ..... pag. 15

Allegato n.1 *Il dominio* .....

Allegato n.2 *Verifica* .....

Laboratori di matematica
Attività progettuale

Osserva attentamente il grafico della funzione seguente e sviluppane le richieste in modo esaustivo.



1. Individua, dall'andamento del grafico, il dominio della funzione.
2. Descrivi perché la funzione è pari.
3. Individua gli asintoti verticali, orizzontali o obliqui della curva.
4. Spiega perché la funzione rappresentata dalla curva in figura non è invertibile.
5. Ricava il dominio della funzione y=ln f(x).
6. Individua gli asintoti verticali della funzione y=ln f(x).
7. Determina la positività della funzione y=ln f(x).
8. Scrivi l'equazione della funzione y=f(x), di cui è rappresentato il grafico, e motiva la tua scelta.

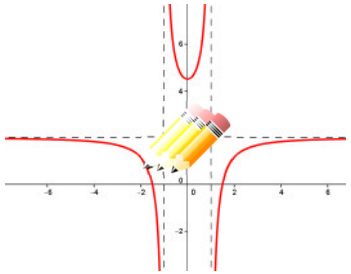
CONSEGNA n. 1

Individua, dall'andamento del grafico, il dominio della funzione.

Soluzione

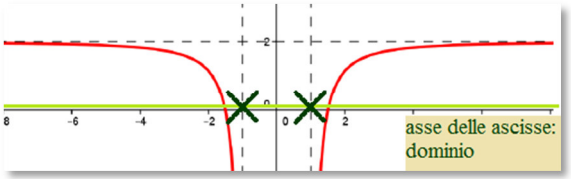
Obbiettivo: individuare il dominio della funzione

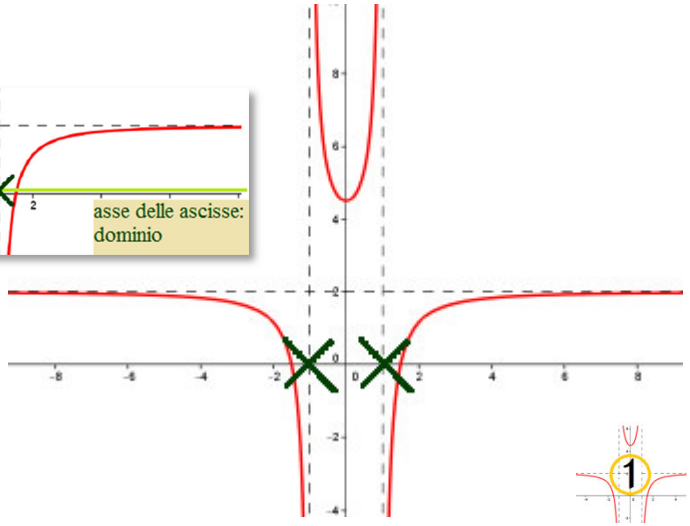
Svolgimento



Non sempre tutto l'insieme $\Re$ rappresenta il dominio, e come si può evincere dalla rappresentazione grafica della funzione fornita (che riporto a lato), esso è una restrizione dell'insieme dei numeri reali: ci sono dei valori per cui la funzione non ha una corrispettiva immagine. Ciò significa che la funzione non è continua e per disegnarla occorre inevitabilmente staccare la penna dal foglio. Osservando attentamente la rappresentazione grafica si può notare che la curva subisce una brusca interruzione per valori $x=1$ e $x=-1$. Di conseguenza la soluzione dell'esercizio è:

$D_f : \forall x \in \Re - \{-1;1\}$





Il dominio di una funzione

Secondo una definizione scientifica la funzione è una legge matematica che opera delle trasformazioni, ma analizzando lo stesso concetto, essa può essere definita come una macchina[1] virtuale, perché così come la macchina è un congegno che esegue delle trasformazioni, allo stesso modo opera la funzione, con la differenza che si tratta di trasformazioni di soli numeri, in particolare si generano numeri dipendenti da numeri indipendenti; i valori indipendenti, che si identificano con la lettera *x*, "passando attraverso questa macchina" originano numeri dipendenti, che si individuano con la lettera *y*. Non sempre però le trasformazioni restituiscono un'immagine, pertanto si definisce **dominio** tutto e solo l'insieme dei valori *x* che hanno un'immagine *y*. L'insieme di tutte le immagini prende nome di **codominio.** Da ciò si deduce che sia il dominio che il codominio non sono necessariamente e rispettivamente l'insieme di partenza e di arrivo (l'insieme dei numeri reali).

DOMINIO (dominio naturale): è l'insieme delle variabili indipendenti che hanno sempre un'immagine in R.

CODOMINIO: è l'insieme di sole immagini.

Per un ulteriore approfondimento sullo studio del dominio si veda l'allegato numero 1

[1] Bisogna ben considerare che il termine "macchina" indica, per antonomasia, l'automobile, ma in realtà questo vocabolo indica "Congegno meccanico ideato per compiere un lavoro che potenzia quello che può svolgere l'uomo con le sue forze o che trasforma un'energia in un'altra" (http://dizionari.corriere.it/dizionario_italiano/M/macchina.shtml) (la *lavatrice* è un esempio di macchina).

CONSEGNA n. 2

Descrivi perché la funzione è pari

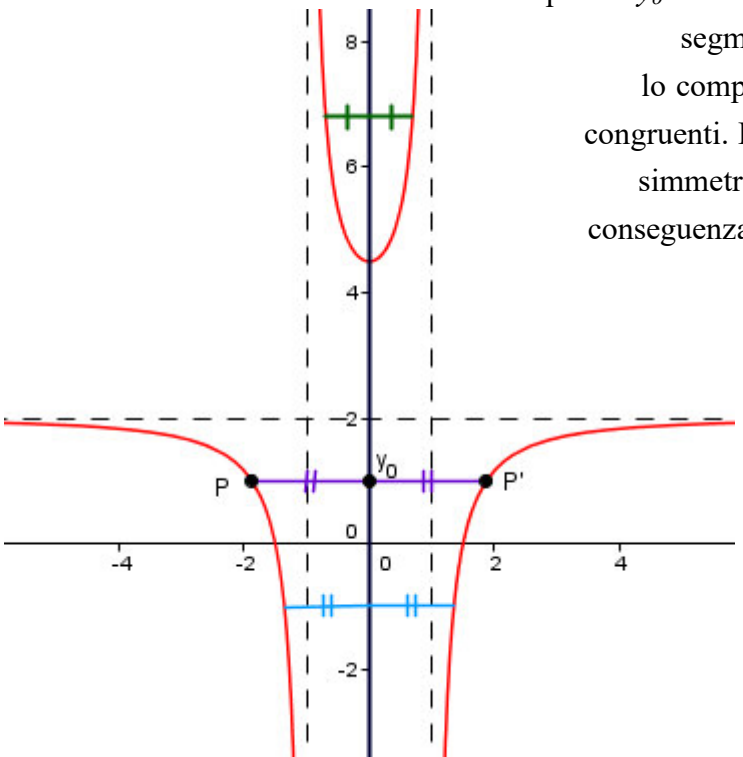
Soluzione

Obbiettivo: fornire le giuste motivazioni per cui la funzione è pari

Svolgimento

Partendo dall'osservazione del grafico la funzione è definita pari in quanto l'asse y rappresenta un'asse di simmetria per la funzione. Esplico quanto appena asserito con la rappresentazione grafica che propongo di seguito realizzata con il programma di grafica *paint*. Conduco da un punto P appartenente alla curva la retta perpendicolare all'asse y passante per il punto y_o. P' rappresenta il punto di intersezione tra la retta appena condotta e la curva stessa. Dato che il punto y_o è il punto medio del segmento PP', i segmenti che lo compongono, P y_o e P'y_o sono congruenti. Pertanto l'asse y è asse di simmetria per la funzione, che di conseguenza è definita *funzione pari.*

C.v.d.



Funzione: pari o dispari?

Una funzione può essere definita pari o dispari a seconda che presenti o meno delle caratteristiche specifiche.

FUNZIONE PARI

Definizione

una funzione $y = f(x)$ definita nel dominio D è pari se $f(x) = f(-x)$ per qualunque x appartenente a D. Da un **punto di vista geometrico** il grafico della funzione presenta una simmetria assiale rispetto all'asse y.

In generale, se la struttura polinomiale di una funzione contiene soltanto potenze della x con *esponente pari*, allora è pari.

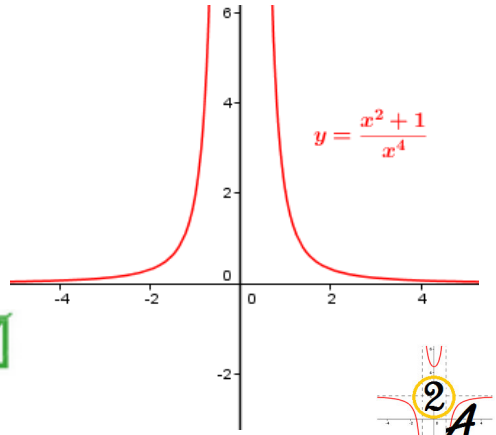
In aggiunta, nel caso di una funzione fratta, se la differenza tra il massimo grado del numeratore e il massimo grado del denominatore dà come risultato un numero pari, la funzione potrebbe essere pari, ma non sarà sicuramente dispari. La certezza sarà data solo dalla verifica algebrica.

Esempio: $y = \dfrac{x^2+1}{x^4}$ **è pari?**

- Differenza tra il grado del numeratore e quello del denominatore: 2-4=-2. -2 è un numero pari → la funzione potrebbe essere pari.
- Osservando la funzione si ottiene la conferma che essa è pari, in quanto tutti gli esponenti della x , 4 e 2, sono numeri pari
- Verifica algebrica: $\dfrac{x^2+1}{x^4} = \dfrac{(-x)^2+1}{(-x)^4}$

La funzione è pari

$$\frac{x^2+1}{x^4} = \frac{x^2+1}{x^4}$$

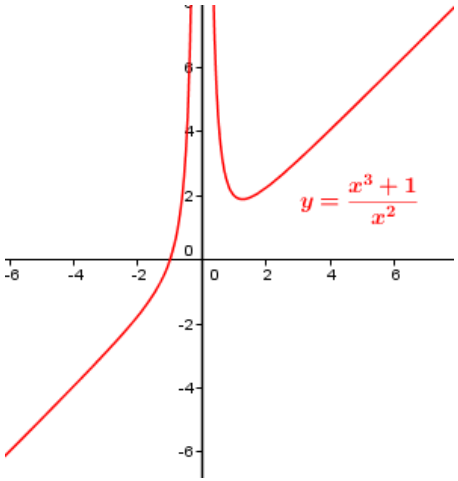


FUNZIONE DISPARI

Una funzione $y = f(x)$ definita nel dominio D è dispari se $f(x) = -f(-x)$ per qualunque x appartenente a D. Da un **punto di vista geometrico** il grafico della funzione presenta una simmetria centrale rispetto all'origine degli assi cartesiani.

In generale, se una funzione ha una struttura algebrica contenente soltanto potenze della x con *esponente dispari*, allora è dispari. In aggiunta, nel caso di una funzione fratta, se la differenza tra il massimo grado del numeratore e il massimo grado del denominatore dà come risultato un numero dispari, la funzione potrebbe essere dispari, ma non sarà sicuramente pari. In ogni caso occorre verificare algebricamente.

Esempio 1 : $y = \dfrac{x^3+1}{x^2}$ **è dispari?**



- Differenza tra il grado del numeratore e quello del denominatore: 3-2=1.
  1 è un numero dispari → la funzione potrebbe essere dispari.
- Osservando la funzione non si ottiene la conferma che essa è dispari, in quanto gli esponenti della x, 3 e 2, non sono entrambi numeri dispari.
- Verifica algebrica: $\dfrac{x^3+1}{x^2} = -\dfrac{(-x)^3+1}{(-x)^2}$

La funzione non presenta simmetrie $\dfrac{x^3+1}{x^2} = \dfrac{x^3-1}{x^2}$ ✗

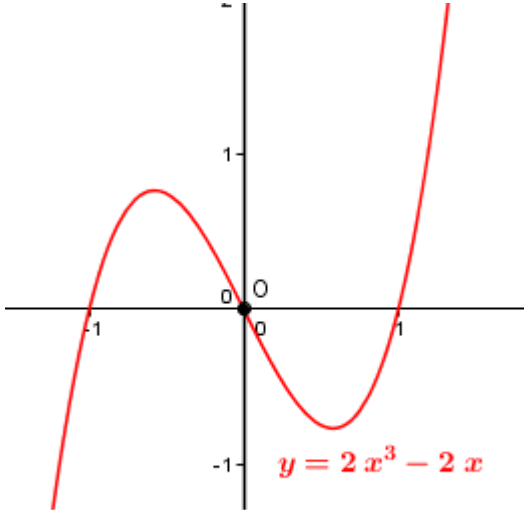
Esempio 2 : $y = 2x^3 - 2x$ **è dispari?**

- Osservando la funzione si nota che la funzione è dispari, in quanto gli esponenti della *x,* 3 e 1 sono entrambi numeri dispari.
- Verifica algebrica:

$$2x^3 - 2x = -\left(2(-x)^3 - 2(-x)\right)$$

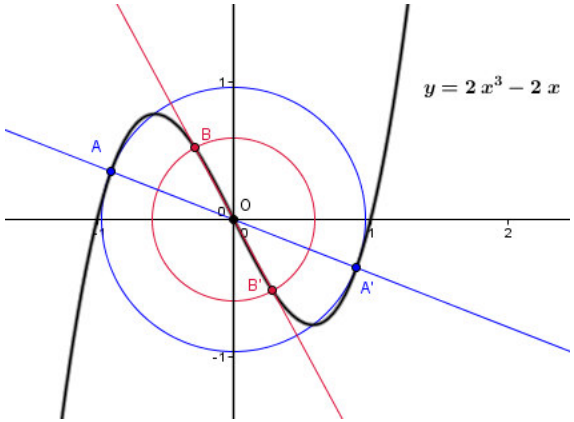
$$2x^3 - 2x = -\left(-2x^3 + 2x\right)$$

$$2x^3 - 2x = 2x^3 - 2x \quad \checkmark$$



La funzione è dispari

Approfondimento



Per la definizione, il grafico di una funzione dispari presenta una simmetria centrale rispetto all'origine del sistema di riferimento. Infatti, preso un punto A appartenenete alla curva e condotta da esso una retta che attraversa il punto O, traccio una circonferenza che ha per centro il punto O e per punto della circonferenza il punto A. Di conseguenza la circonferenza interseca la retta in due punti A e A', entrambi appartenenti alla funzione e posti in posizione equidistante ripetto ad O. Si è costruita in questo modo una simmetria centrale.

CONSEGNA n. 3

Individua gli asintoti verticali, orizzontali o obliqui della curva

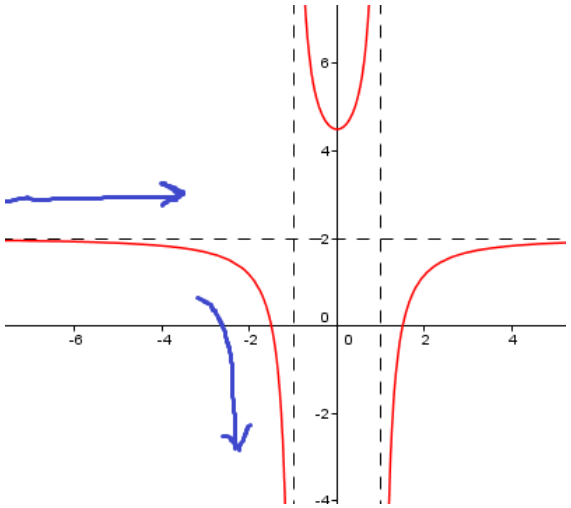
Soluzione

Obbiettivo: individuare gli asintoti orizzontali, verticali e obliqui..

Svolgimento

Premesso che secondo le regole per disegnare correttamente la curva di una funzione gli eventuali asintoti devono essere rappresentati mediante delle rette trattteggiate, da un'ossservazione molto superficiale dell'immagine iconica fornita, si può dedurre che le tre rette, di cui due verticali e una orizzontale che hannno rispettivamente equazione $x=-1$, $x=1$ e $y=2$, rappresentno gli asintoti della funzione.

Prima fase_ Secondo un'analisi più accurata, e partendo dalla definizione di asintoto (retta che accompagna la curva all'infinito indicandone la direzione) e leggendo il grafico da sinistra verso l'origine degli assi cartesiani, si può asserire che: provenendo da -∞ verso 0, la curva "sfiora" sempre meno la retta di equazione $y=2$ fino a che dopo aver intersecato l'asse delle ascisse prosegue verso il basso, verso -∞ tendendo sempre più a "toccare" la retta $x=-1$ che



Gli asintoti

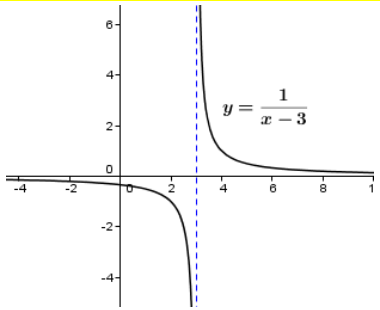
Definizione [fonte: Wikipedia]

Il termine **asintoto** è utilizzato in matematica per designare una retta, o più generalmente una curva, alla quale si avvicina indefinitamente una funzione data. Con il termine asintoto, senza ulteriori specificazioni, si intende, genericamente, una retta, a meno che dal contesto non emerga un altro significato, quando si vuole essere più specifici si parla di **retta asintotica** o, più in generale, di **curva asintotica**.

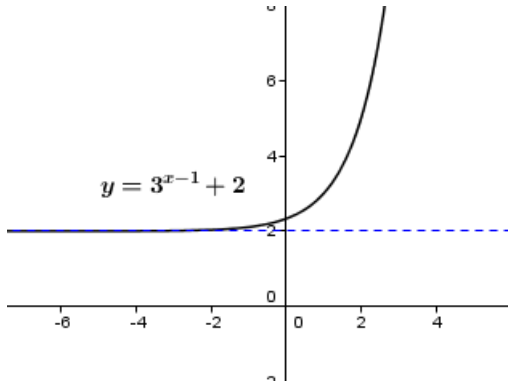
Dunque l'asintoto è una retta che indica la direzione lungo la quale si sviluppa la curva. Inoltre, per vedere se una funzione $f(x)$ presenta asintoti occorre esaminarne il comportamento in punti critici: i punti che non appartengono al dominio e agli estremi (del dominio). Nel caso in cui la funzione è definita in tutto $\Re$, non ci saranno asintoti verticali, ed è opportuno ricercare eventuali asintoti orizzontali o obliqui.

I diversi tipi di asintoto

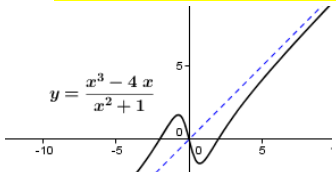
1. ASINTOTO VERTICALE



2. ASINTOTO ORIZZONTALE



3. ASINTOTO OBLIQUO

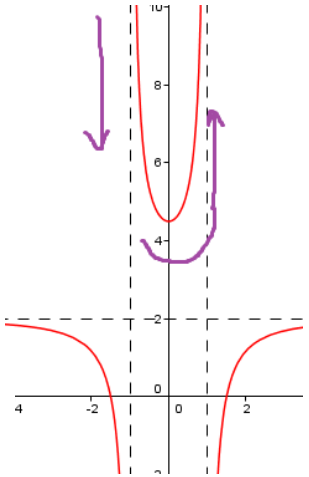


pertanto è un asintoto verticale. Sotto una forma matematica, ciò significa che:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$$ **Asintoto orizzontale destro**

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$$ **Asintoto verticale sinistro**

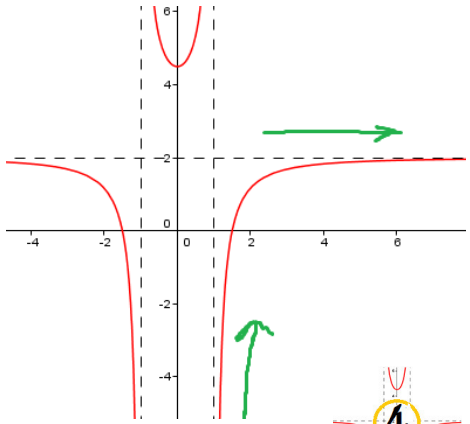
Seconda fase_ Subito a destra di -1 la curva, provenendo da $+\infty$ dopo aver intercettato l'asse y, cambia andamento: da discendente diviene ascendente e questo secondo ramo di parabola tende sempre più ad avvicinarsi alla retta $x=1$ che per questo motivo è un asintoto verticale. Trascrivo quanto appena asserito in forma algebrica, una forma più elegante:



$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$$ **Asintoto verticale destro**

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$$ **Asintoto verticale sinistro**

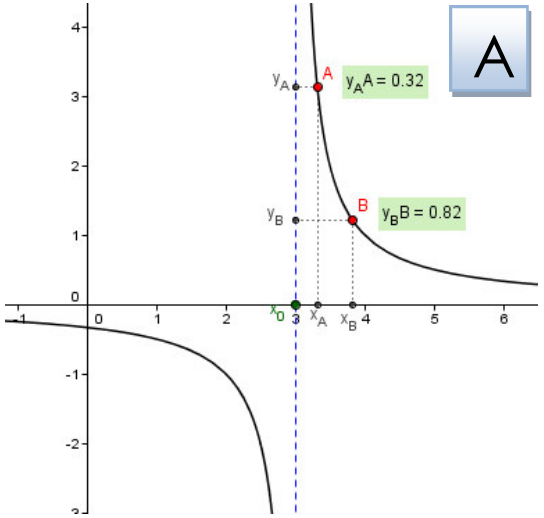
Terza fase_ Subito dopo questa barriera invalicabile la curva proveniente da $-\infty$ incontra l'asse x in un punto e prosegue il suo andamento monotono crescente tendendo ad avvicinarsi sempre più alla retta $y=2$ fino a quando la curva e la



In questa occasione saranno trattati solo l'asintoto verticale e orizzontale, in quanto l'asintoto obliquo non è presente nella funzione fornita dalla consegna.

1. ASINTOTO VERTICALE

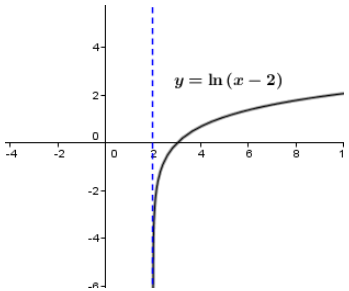
Data la funzione $y=f(x)$, se si verifica che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, la retta $x=x_0$ è un asintoto verticale per il grafico della funzione.



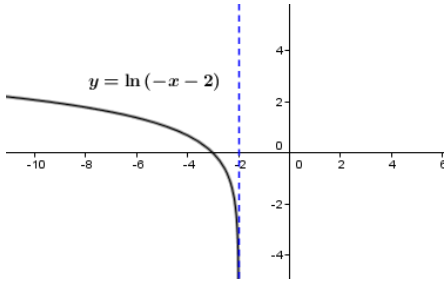
NB: se il limite della funzione è infinito solo per $x\to x_0^-$ o per $x\to x_0^+$ si parla, rispettivamente, di asintoto verticale sinistro o di asintoto verticale destro. In questo caso il punto x_0 è un punto di discontinuità di seconda specie. A differenza degli asintoti orizzontali e obliqui, non può essere attraversato.

Dalla rappresentazione A si può notare che la distanza tra un punto della curva e la retta $x=3$ tende a zero al tendere di x a 3. Ovvero l'ordinata del suddetto punto x_0 tende all'infinito quando x tende a 3.

NB: asintoto verticale destro



NB: asintoto verticale sinistro



retta si incontreranno all'∞. Tutto ciò equivale a scrivere:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$$

Assemblando tutte le informazioni ricavate dall'analisi condotta nelle tre fasi, si può dichiarare in definitiva che gli asintoti[2] della funzione sono:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2 \\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = 2\end{array}\right\} \quad y=2: \textbf{asintoto orizzontale}$$

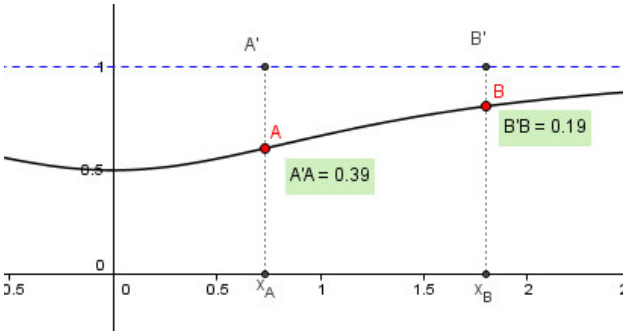
$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \quad x=-1: \textbf{asintoto vertictale}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \quad x=1: \textbf{asintoto verticale}$$

[2] Quando non è specificato se un asintoto è destro o sinistro, significa che esso rappresenta una barriera sia a destra che a sinistra del punto in cui si verifica la discontinuità.

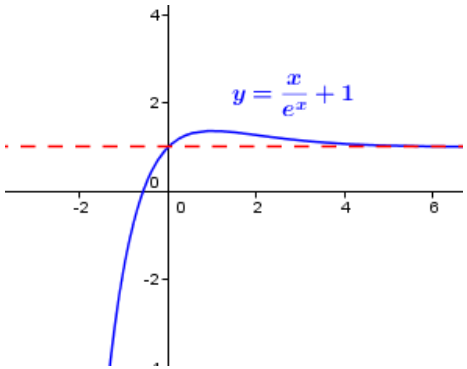
ASINTOTO ORIZZONTALE

Data la funzione $y=f(x)$, se si verifica che $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$, la retta $y=l$ è un asintoto orizzontale per il grafico della funzione, che come nel caso precedente può essere sia solo destro che solo sinistro.



Dalla rappresentazione a lato si può notare che la distanza tra un punto della curva e la retta $y=1$ tende a zero al tendere di x a $+\infty$, vale a dire l'ordinata del suddetto punto tende al valore finito 1 quando la x tende a $+\infty$.

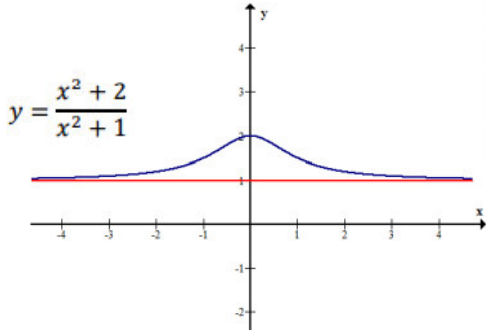
NB: asintoto orizzontale destro



$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = 1\end{array}\right\}$$

$y=2$: **asintoto orizzontale destro**

NB: Asintoto orizzontale



$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1 \\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = 1\end{array}\right\}$$

$y=1$ **asintoto orizzontale**

CONSEGNA n. 4

Spiega perché la funzione rappresentata dalla curva in figura non è invertibile.

Soluzione

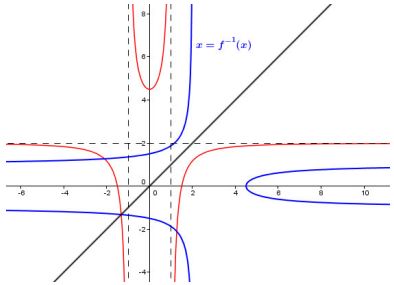
Obbiettivo: dall'osservazione attenta del grafico della funzione, fornire le giuste motivazioni per le quali la funzione non è invertibile.

Svolgimento

Si definisce $x = f^{-1}(y)$ la funzione inversa di $y = f(x)$, la quale associa **tutte** ed **una sola volta** le *y* che appartengono al codominio, alla *x*, perciò una funzione è invertibile quando è sia iniettiva che suriettiva, ovvero, biiettiva. Da ciò si trae che una funzione è invertibile quando ha un andamento continuo (non presenta discontinuità), ed anche monotono.

Come è emerso dallo svolgimento dei punti precedenti, la funzione presenta dei punti di discontinuità, che compromettendole l'essere biiettiva, $y = f(x)$ non è invertibile.

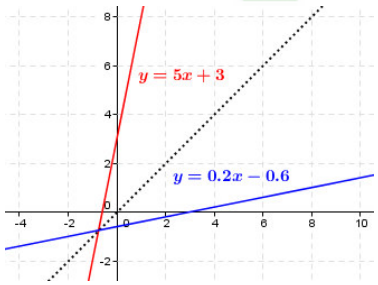
In aggiunta, considerando che la funzione inversa scaturisce da una simmetria assiale del grafico rispetto alla retta $y = x$, bisettrice del primo e terzo quadrante, riporto l'immagine segeuente che rappresenta appunto questa simmetria.



Funzione invertibile?

Una funzione è invertibile quando è biunivoca, ha un andamento monotono e continuo.

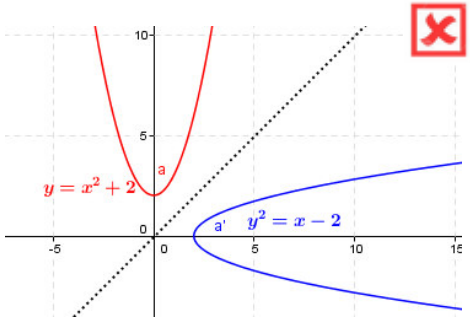
La retta[3]



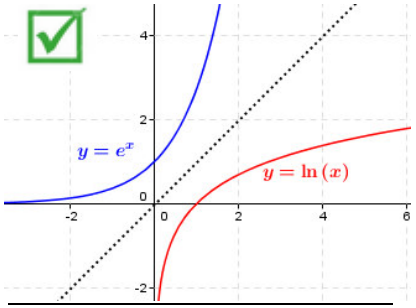
Sì perché _ è una funzione continua in tutto $\Re$ e ha un andamento monotono.

La parabola[4]

No perché _ è una funzione continua in tutto $\Re$, ma non è biiettiva e non ha un andamento monotono.

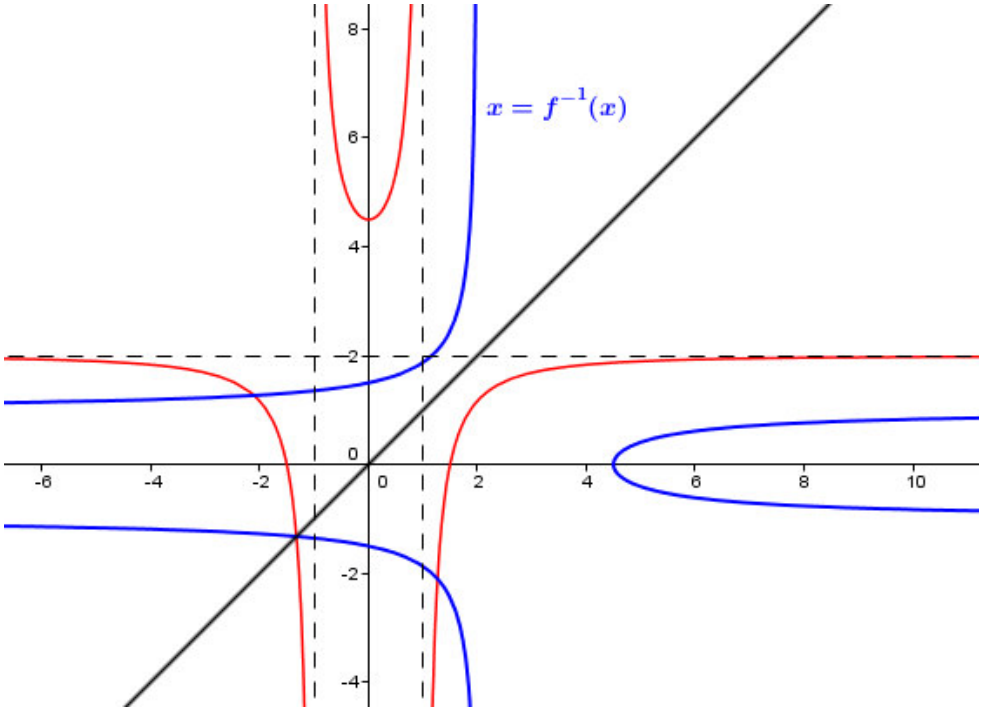


Funzione logaritmica[4]



Sì perché _ ha un andamento monotono ed è biiettiva se si considera il dominio come una restrizione dell'insieme $\Re$.

[3] La funzione di partenza è quella in rosso, il grafico della funzione inversa è di colore blu, la bisettrice del I e III quadrante è un linea tratteggiata nera.



Verbalizzazione

La funzione di partenza è quella in rosso e la sua inversa dovrebbe essere colorata in blu, ma il grafico blu non è quello di una funzione, in quanto ad un valore x corrispondono due valori y contrastando con la definizione[4] stessa di funzione. Pertanto, anche tramite questa costruzione geometrica, si è giunti alla conclusione che la funzione $y = f(x)$ non è invertibile.

[4] Dati due insiemi A e B, si dice *funzione* una legge che associa **ad ogni** elemento dell'insieme A **uno ed un solo** elemento dell'insieme B. Si indica come $y = f(x)$

CONSEGNA n. 5

Ricava il dominio della funzione y=ln f(x).

Soluzione

Obbiettivo: dopo aver costruito la funzione $y = \ln f(x)$ calcolarne il dominio.

Svolgimento

Dato che non si conosce ancora l'equazione della funzione, anche in questo caso, occorre sfruttare le conoscenze intrinseche nella rappresentazione grafica.

Premessa funzionale allo svolgimento dell'esercizio

1- Data una funzione razionale algebrica fratta di tipo $y = \left[\frac{h(x)}{g(x)}\right]$ il dominio è dato dalla condizione $g(x) \neq 0$, mentre il segno della funzione, dalla condizione $\frac{h(x)}{g(x)} \geq 0$.

2- In una funzione trascendente logaritmica di tipo $y = \ln f(x)$, che nel caso in questione diventa $y = \ln\left[\frac{h(x)}{g(x)}\right]$[5] il dominio è dato dal rispetto delle seguenti imposizioni: $\frac{h(x)}{g(x)} > 0 \cap g(x) \neq 0$.

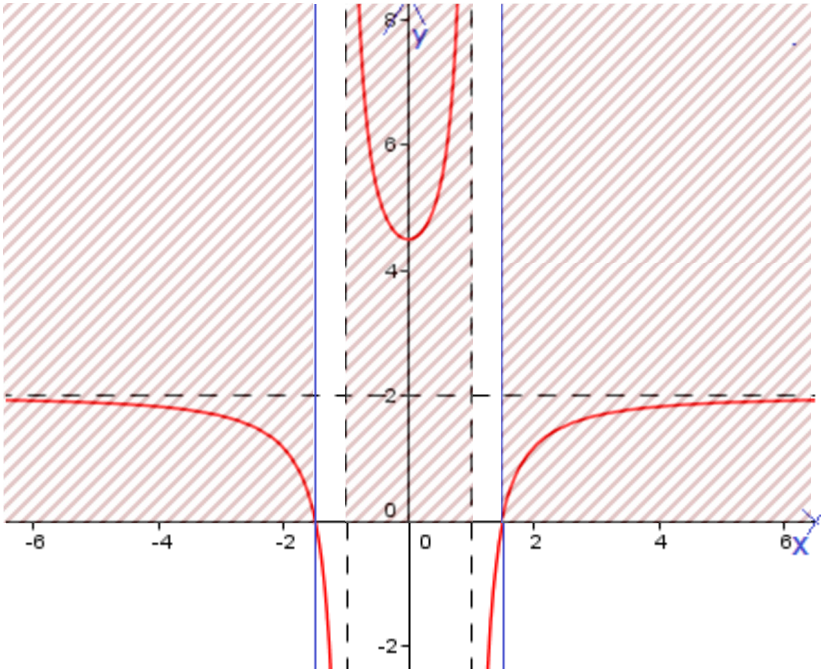
[5] $y = f(x)$ è una funzione algebrica fratta che si può scrivere come $y = \left[\frac{h(x)}{g(x)}\right]$

Confrontando le due sentenze si deduce che il dominio della funzione $y = \ln f(x)$ è numericamente uguale alla soluzione scaturita dal segno della funzione algebrica razionale fratta escluso il caso in cui l'espressione sia

FUNZIONE $y = f(x)$	FUNZIONE $y = \ln f(x)$
La funzione si può scrivere come $y = \left[\frac{h(x)}{g(x)}\right]$	**La funzione si può scrivere come** $y = \ln\left[\frac{h(x)}{g(x)}\right]$
Dominio della funzione: $g(x) \neq 0$	**Dominio** della funzione: $\frac{h(x)}{g(x)} > 0 \cap g(x) \neq 0$
Segno della funzione: $\frac{h(x)}{g(x)} \geq 0$	**Segno della funzione**: $\ln \frac{h(x)}{g(x)} \geq 0$

uguale a zero per la condizione di esistenza stessa della funzione logaritmica. Di conseguenza, dal calcolo del segno della funzione $y = f(x)$ si individua il dominio della funzione $y = \ln f(x)$.

- Segno della funzione $y = f(x)$.



Dato che il *segno della funzione* - intervallo di positività - indica gli intervalli in cui la funzione è positiva, cioè tutte le aree sopra l'asse della ascisse nelle quali si sviluppa la curva, come si evince dall'immagine sopra riportata, le aree suddette (evidenziate tramite un'oscurazione) sono le seguenti: $x \le -\frac{3}{2} \cup -1 < x < 1 \cup x \ge \frac{3}{2}$[6].

Da ciò e dalle motivazioni dette in precedenza, il dominio della funzione $y = \ln f(x)$ è $Df : x < -\frac{3}{2} \cup -1 < x < 1 \cup x > \frac{3}{2}$.

[6] x=-1 e x=1 sono esclusi dal segno della funzione perché sono due punti di discontinuità per la funzione come è stato calcolato nella consegna n.1.
Si ricordi inoltre, che A(-1,5;0) e B(1,5;0) sono i due punti di intersezione della curva con l'asse delle ascisse.

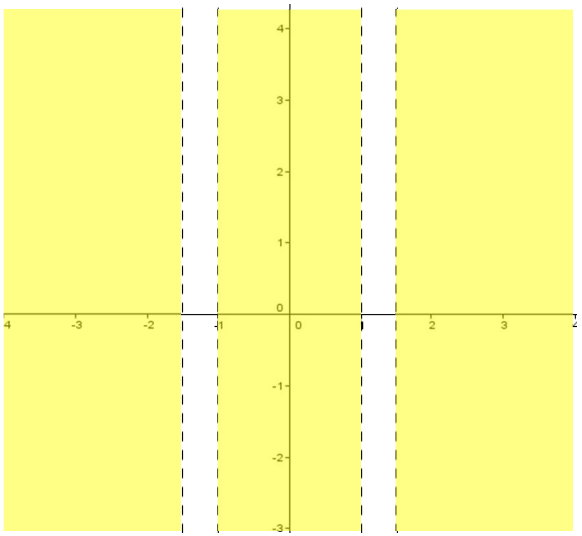
CONSEGNA n. 6

Individua gli asintoti verticali della funzione y=ln f(x).

Soluzione[7]

Obbiettivo: data la funzione composta $y = \ln f(x)$ calcolarne le equazioni degli asintoti verticali.

Svolgimento



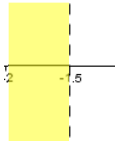
Come è possibile individuare nell'immagine a lato e per il punto precedente, il grafico della funzione $y = \ln f(x)$ non esiste in tutto $\Re$, ma solo nelle aree evidenziate, pertanto occorre studiare il comportamento della curva solo in queste aree del piano.

Si ricordi inoltre, che un asintoto verticale è frutto di punti di discontinuità di seconda specie. Se per la funzione di partenza gli asintoti erano solo due: $x = -1$ e $x = 1$, per la funzione composta saranno i suddetti ed anche $x = -\frac{3}{2}$ e $x = \frac{3}{2}$ perché, da come si ricava dalla consegna precedente, anche questi ultimi due valori sono esclusi dal campo d'esistenza della funzione. Giacchè la funzione presenta non solo punti di

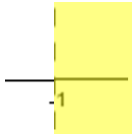
[7] In tutte le immagini riportate nello svolgimento di questa consegna, le aree in cui funzione esiste sono colorate di colore giallo.

discontinuità, ma anche delle aree di non esistenza $\Rightarrow$

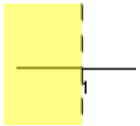
- la retta $x=-\frac{3}{2}$ è un asintoto verticale sinistro, perché a destra di tale valore la funzione non esiste.



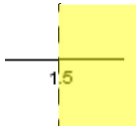
- la retta $x=-1$ è un asintoto verticale destro, perché a sinistra di tale valore la funzione non esiste.



- la retta $x=1$ è un asintoto verticale sinistro, perché a destra di tale valore la funzione non esiste.



- la retta $x=\frac{3}{2}$ è un asintoto verticale destro, perché a sinistra di tale valore la funzione non esiste.



Gli asintoti verticali della funzione $y=\ln f(x)$ sono

$x=-1$: asintoto vert. destro

$x=1$: asintoto vert. sinistro

$x=-\frac{3}{2}$: asintoto vert. sinistro

$x=\frac{3}{2}$: asintoto vert.destro

CONSEGNA n. 7

Determina la positività della funzione y=ln f(x).

Soluzione

Obbiettivo: dall'immagine fornita del grafico determinarne l'intervallo di positivita della funzione $y = \ln f(x)$.

Svolgimento

Data la funzione[8] $y = \ln f(x)$ ne calcolo il segno:

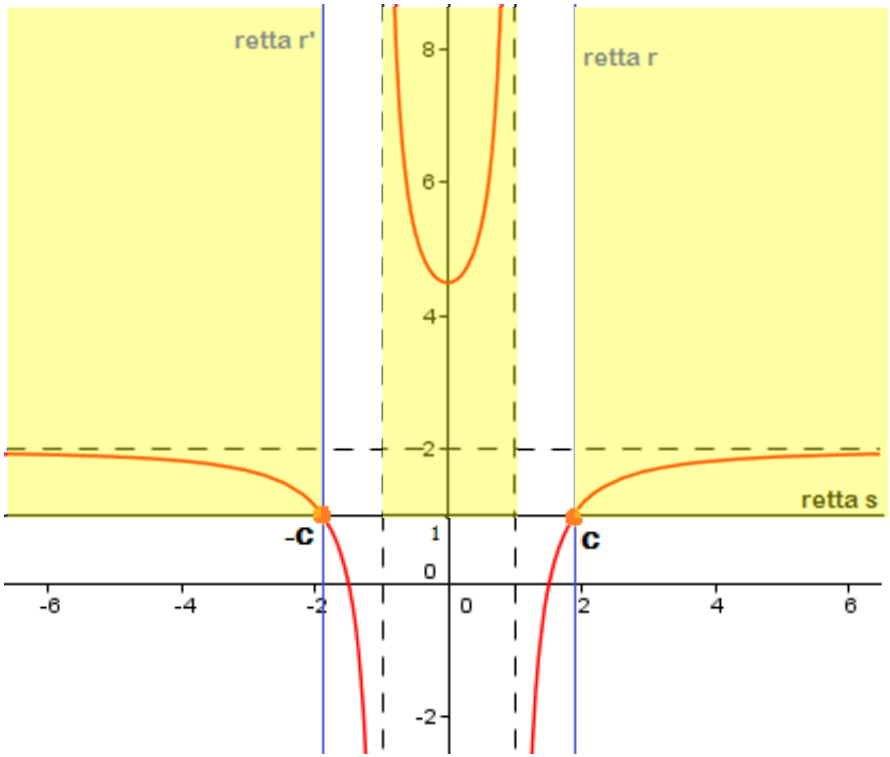
Segno di *p(x):*

$$p(x) \geq 0 \Rightarrow \ln f(x) \geq 0 \Rightarrow \ln f(x) \geq \ln 1 \Rightarrow f(x) \geq 1$$

Non conoscendo l'equazione della funzione, sfrutto tutte le informazioni ricavabili dal grafico apportando anche le opportune modifiche sulla rappresentazione grafica, facendo traslare l'asse delle ascisse di 1 unità verso l'alto, poiché la funzione è positiva per tutti quei punti che esistono sopra la retta di equazione $y = 1$.

Riporto l'immagine a cui ho fatto appena riferimento evidenziando le aree suddette nella pagina seguente.

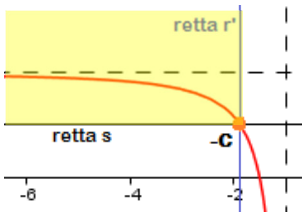
[8] Per comodità ed una maggiore chiarezza chiamo la funzione $y = \ln f(x)$ come *p(x)*.



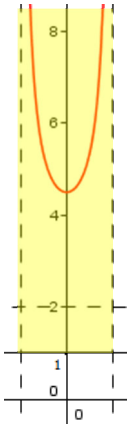
Verbalizzazione

Il grafico della funzione incontra la retta sopraccitata $y = 1$ denominata *retta s*, in due punti che per la natura simmetrica della funzione (v. pag. 2) chiamo *C* e *–C,* di conseguenza questi due punti avranno ordintata pari ad 1. x_C è uguale numericamente al punto dell'asse delle ascisse che appartiene alla *retta r* perpendicolare all'asse x e passante per il punto *C*. Allo stesso modo individuo x_{-C}, considerando però la *retta r'* simmetricamente opposta alla prima. Dunque la funzione è positiva:

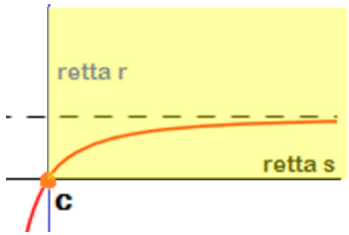
- nel secondo quadrante di un nuovo piano *(s;r')* i cui assi di riferimento ortogonali sono la *retta s* e la *retta r'* e il punto *–C* è l'origine degli assi.



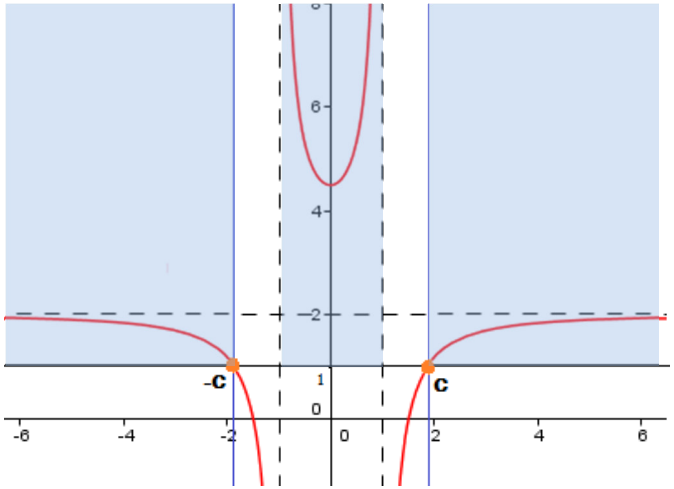
- per valori compresi, estremi esclusi, tra -1 e 1.



- nel primo quadrante del piano *(s;r)* i cui assi di riferimento ortogonali sono la *retta s* e la *retta r* e ha come punto di intersezione dei due nuovi assi il punto C.



Dopo quanto espresso si può asserire che la funzione $y = \ln f(x)$ è positiva negli intervalli $x \leq -C \cup -1 < x < 1 \cup x \geq C$.



CONSEGNA n. 8

Scrivi l'equazione della funzione y=f(x), di cui è rappresentato il grafico, e motiva la tua scelta.

Soluzione

Obbiettivo: dopo aver svolto tutte le attivita precedenti, individuare correttamente l'equazione della funzione $y = f(x)$.

Svolgimento

Per il raggiungimento rapido e corretto dell'obbiettivo elenco di seguito, in una tabella, tutte le conosenze relative alla funzione che sono state acquisite durante la risoluzione delle consegne precedenti.

Conoscenze[9]		Tradotto in algebra
$D_f : \forall x \in \Re - \{-1;1\}$ $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$ $x = -1$: asintoto verticale $\lim_{x\to +1^-} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to +1^+} f(x) = -\infty$ $x = 1$: asintoto verticale	Dato che, come si è più volte ribadito, $y = f(x)$ è una funzione algebrica razionale fratta che esiste quando il denominatore è diverso da -1 e 1, tali valori rappresentano le due soluzioni dell'equzione del denominatore.	D: $(x-1)(x+1)$ D: (x^2-1)

[9] Ad ogni step successivo riporto e aggiungo le conoscenze ricavate dai punti precedenti, mettendo per iscritto il processo logico seguito per individuare l'equazione algebrica della funzione.

$f(x)=f(-x)$ vero	La funzione essendo pari non presenta nella struttura polinomiale sia del numeratore che del denominatore monomi di grado dispari.	$y=\frac{x^{n-1}+x^{n+1}+x^{n+3}\ldots}{x^2-1}$ NB: *n* è un numero naturale 1, ogni monomio del numeratore ha grado pari.
$A\left(-\frac{3}{2};0\right)\in\gamma$ $B\left(\frac{3}{2};0\right)\in\gamma$	Essendo due punti di intersezione tra la curva[10] e l'asse x, $x=-3/2$ e $x=3/2$ sono due valori che annullano il numeratore della funzione, e ciò implica che essi sono le soluzioni dell'equazione del numeratore.	N: $\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)$ N: $\left(x^2-\frac{9}{4}\right)$ N: $4x^2-9$ $y=\frac{4x^2-9}{x^2-1}$
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$ $y=2$: asintoto orizzontale	La funzione presentando un asintoto orizzontale ($y=2$), per la *regola ordine degli infiniti*, il numeratore e il denominatore devono avere lo stesso grado ed in particolare, il loro rapporto dei coefficienti di massimo grado deve essere pari a 2 e per questo moltiplico tutto il denominatore per 2.	$y=\frac{4x^2-9}{2\cdot\left(x^2-1\right)}$ $y=\frac{4x^2-9}{2x^2-2}$

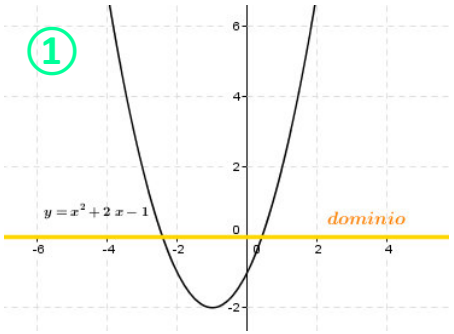
L'equazione della curva rappresentata è $y=\frac{4x^2-9}{2x^2-2}$.

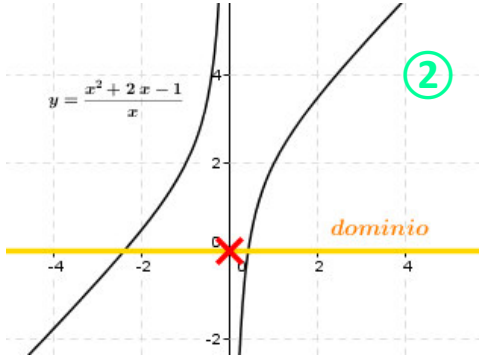
[10] Il grafico della funzione è indicato con la lettera γ.

Allegato n. 1

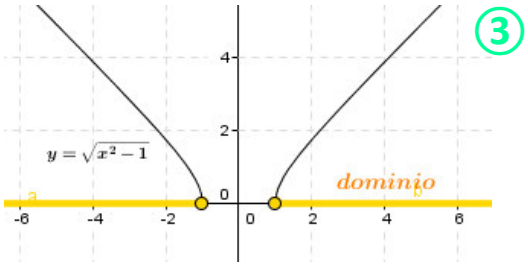
Il dominio

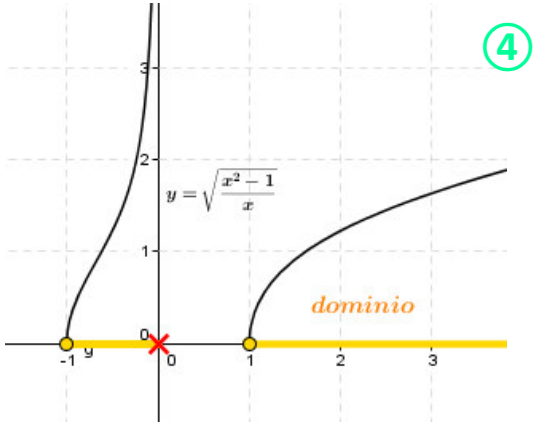
Riporto nella tabella seguente tutte le informazioni inerenti al dominio che possono essere utili nello svolgimento delle attività.

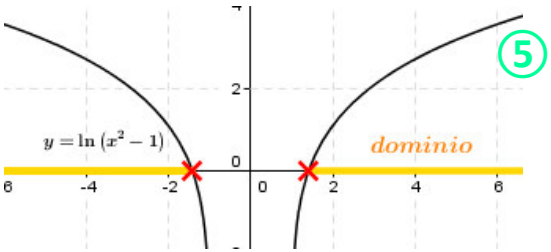




			Funzione	Condizione	Esempio
ALGEBRICA	Razionale	Intera	$y = f(x)$	La funzione esiste per qualsiasi valore della x $\forall x \in \Re$	$y = x^2 + 2x - 1$ $D_f : \forall x \in \Re$ ①
		Fratta	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	Porre il denominatore diverso da 0, perché ogni quantità fratto 0 è uguale ∞ $g(x) \neq 0$	$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$ $D_f : x \neq 0$ ②
	Irrazionale	Intera [11]	$y = \sqrt[n]{f(x)}$	Porre il radicando maggiore e uguale a 0. $f(x) \geq 0$	$y = \sqrt{x^2 - 1}$ $D_f : x \leq -1 \cup x \geq 1$ ③
		Fratta [12]	$y = \sqrt[n]{\frac{f(x)}{g(x)}}$	Porre il radicando maggiore e uguale a 0, e il denominatore diverso da 0. $\begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$	$y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x}}$ $D_f : -1 \leq x < 0 \cup x \geq 1$ ④
TRASCENDENTE	logaritmica		$y = \log_a f(x)$	La base deve essere necessariamente maggiore di 0 e porre l'argomento della funzione maggiore di 0. $f(x) > 0$	$y = \ln(x^2 - 1)$ $D_f : x < -1 \cup x > 1$ ⑤







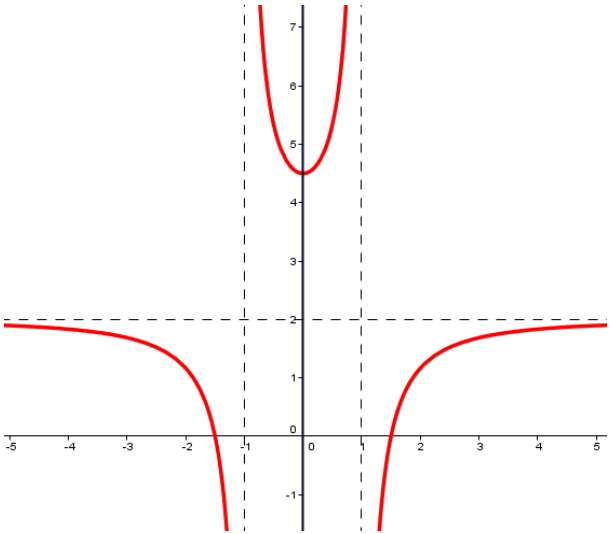
[11] Condizione per *n pari*, nel caso in cui l'indice della radice sia dispari, non occorre porre alcuna condizione, giacché un radicando ad indice dispari esiste sempre.

[12] Condizione per *n pari*, nel caso in cui l'indice della radice sia dispari, occorre porre solo la condizione che il denominatore sia diverso da 0.

Allegato n. 2

Verifica

Per verificare quanto sviluppato durante tutto questo percorso, riporto lo svolgimento dello stesso compito in modo indiretto: dalla conoscenza dell'equazione all'individuazione del dominio, del segno, e degli asintoti.



Studio della funzione[13]

$$y = \frac{4x^2 - 9}{2x^2 - 2}$$

- **Dominio**

$$2x^2 - 2 \neq 0$$

$$x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$$

$$D_f : \forall x \in \Re - \{-1;1\}$$

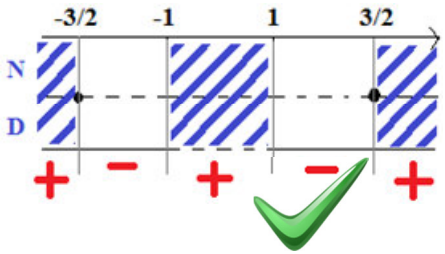
- **Segno della funzione**

$$\frac{4x^2 - 9}{2x^2 - 2} \geq 0$$

$$N \geq 0 : 4x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow x \leq -\frac{3}{2} \cup x \geq \frac{3}{2}$$

$$D > 0 : 2x^2 - 2 > 0 \Rightarrow x < -1 \cup x > 1$$

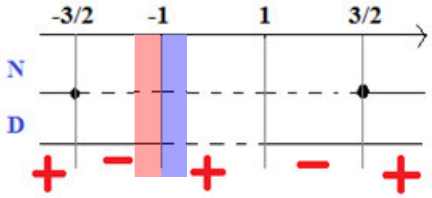
$$soluzione : x \leq -\frac{3}{2} \cup -1 < x < 1 \cup x \geq \frac{3}{2}$$



- **Ricerca degli asintoti**[14]

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{4x^2-9}{2x^2-2} = \frac{4-9}{2-2} = \frac{-5}{0} = -\infty$$

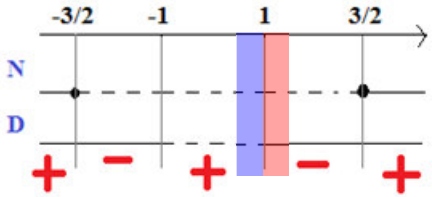
$$\lim_{x \to -1^+} \frac{4x^2 - 9}{2x^2 - 2} = \frac{4 - 9}{2 - 2} = \frac{-5}{0} = +\infty$$



$x = -1$: asintoto verticale

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{4x^2-9}{2x^2-2} = \frac{4-9}{2-2} = \frac{-5}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{4x^2 - 9}{2x^2 - 2} = \frac{4 - 9}{2 - 2} = \frac{-5}{0} = -\infty$$



$x = 1$: asintoto verticale

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 - 9}{2x^2 - 2} = 2$$

per la regola dell'ordine degli infiniti

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - 9}{2x^2 - 2} = 2$$

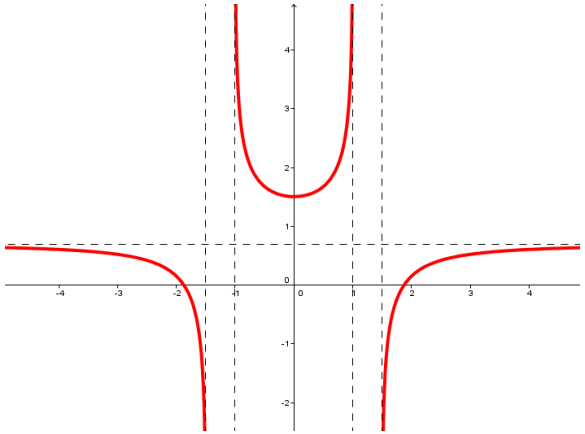
per la regola dell'ordine degli infiniti

$y = 2$: asintoto orizzontale

Dallo studio della funzione $y = \frac{4x^2 - 9}{2x^2 - 2}$ ho ricavato le stesse informazioni ottenute in precedenza, pertanto, l'equazione della funzione è corretta.

[13] Non è uno studio della funzione completo, in quanto manca lo sviluppo della crescenza e decrescenza della curva, e concavità e convessità, ma questi ultimi due non sono richiesti

[14] Per il calcolo dei seguenti limiti, usufruisco le informazioni ricavabili dal grafico dei segni fatto nel punto precedente.



Studio della funzione

$$y = \ln\frac{4x^2-9}{2x^2-2}$$

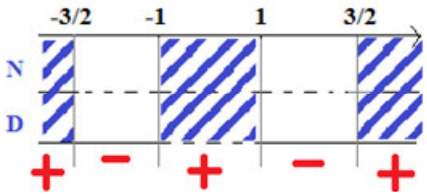
- **Dominio**[15]

$$\begin{cases} \dfrac{4x^2-9}{2x^2-2} > 0 \\ 2x^2-2 \neq 0 \end{cases}$$

Risolvo la disequazione

$N \geq 0 : 4x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow x < -\frac{3}{2} \cup x > \frac{3}{2}$

$D > 0 : 2x^2 - 2 > 0 \Rightarrow x < -1 \cup x > 1$



Soluzione:

$D_f : x < \frac{3}{2} \cup -1 < x < 1 \cup \frac{3}{2}$

- **Segno della funzione**

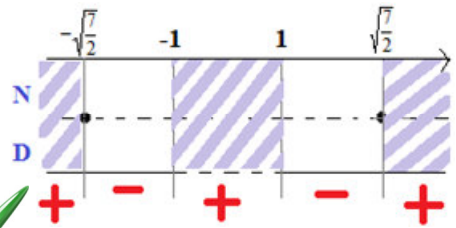
$$\ln\frac{4x^2-9}{2x^2-2} \geq 0 \Rightarrow \ln\frac{4x^2-9}{2x^2-2} \geq \ln 1 \Rightarrow \frac{4x^2-9}{2x^2-2} \geq 1$$

$$\frac{4x^2-9}{2x^2-2} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{2x^2-7}{2x^2-2} \geq 0$$

$N \geq 0 : 2x^2 - 7 \geq 0 \Rightarrow x \leq -\sqrt{\frac{7}{2}} \cup x \geq \sqrt{\frac{7}{2}}$

$D > 0 : 2x^2 - 2 > 0 \Rightarrow x < -1 \cup x > 1$

$soluzione : x \leq -\sqrt{\frac{7}{2}} \cup -1 < x < 1 \cup x \geq \sqrt{\frac{7}{2}}$

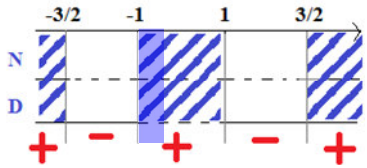


[15] La seconda condizione può essere tralasciata in quanto è implicita nella prima disequazione.

- **Ricerca degli asintoti**[16]

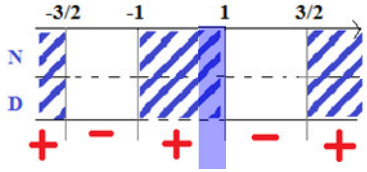
$$\lim_{x\to -1^+} ln\frac{4x^2-9}{2x^2-2} = ln\frac{4-9}{2-2} = ln\frac{-5}{0} = ln\infty = +\infty$$

$x = -1$: asintoto verticale destro



$$\lim_{x\to 1^-} ln\frac{4x^2-9}{2x^2-2} = ln\frac{4-9}{2-2} = ln\frac{-5}{0} = ln\,\infty = +\infty$$

$x = 1$: asintoto verticale sinistro



$$\lim_{x\to -\frac{3}{2}^-} ln\frac{4x^2-9}{2x^2-2} = ln\frac{9-9}{\frac{5}{2}} = ln0 = -\infty$$

$x = -\frac{3}{2}$: asintoto verticale sinistro

$$\lim_{x\to \frac{3}{2}^+} ln\frac{4x^2-9}{2x^2-2} = ln\frac{9-9}{\frac{5}{2}} = ln0 = -\infty$$

$x = \frac{3}{2}$: asintoto verticale destro

$$\lim_{x\to -\infty} ln\frac{4x^2-9}{2x^2-2} = ln2 \qquad \lim_{x\to +\infty} ln\frac{4x^2-9}{2x^2-2} = ln2$$

per la regola dell'ordine degli infiniti per la regola dell'ordine degli infiniti

$y = \ln(2)$: asintoto orizzontale

Dallo studio della funzione $y = \ln\frac{4x^2-9}{2x^2-2}$ ho ricavato le stesse informazioni ottenute in precedenza, pertanto, l'equazione della funzione è corretta.

[16] Per il calcolo dei seguenti limiti, usufruisco le informazioni ricavabili dal grafico dei segni fatto nel punto precedente. Inoltre i limiti si calcolano solo nelle aree in cui la curva esiste, ad esempio, non bisogna studiare il comportamento del grafico a sinistra di -1 perché nell'intervallo $-\frac{3}{2} < x < 1$ la funzione non esiste.

Fine

Alunna:

Marianna Angiolelli VA

Insegnante:

Luigi Boscaino